

Andrzej POWNUK ^{*)}

PRZEDZIAŁOWE METODY ROZWIĄZYWANIA ALGEBRAICZNYCH RÓWNAŃ NIELINIOWYCH MECHANIKI KONSTRUKCJI

1. Wprowadzenie

Mechanika liniowa stanowi jak dotąd podstawowy obszar zainteresowań inżynierskich. Istnieje jednak pewna klasa zadań, gdzie analiza liniowa jest nie wystarczająca. Powstało wiele monograficznych opracowań tego typu zagadnień [1,2,3,4,5,6,7,8]. Efektywne korzystanie z algorytmów analizy nieliniowej stało się możliwe dzięki wykorzystaniu techniki komputerowej oraz rozwojowi metod numerycznych. Spośród stosowanych obecnie algorytmów na szczególną uwagę zasługują MEB [9, 3], MES [2,3,4,5,6,8,10,11] oraz MRS [3]. Z teoretycznego punktu widzenia wszystkie wymienione metody są szczególnym przypadkiem metody odchylek ważonych [3,12,8]. Algorytm metody tej przebiega w następujących etapach. Najpierw określamy postać przybliżonego rozwiązania zadania brzegowego

$$L(u) - B = 0 \text{ dla } x \in \Omega \quad (1)$$

$$L^b(u) - B^b = 0 \text{ dla } x \in \partial\Omega \quad (2)$$

jako kombinację liniową pewnych funkcji bazowych φ_i tzn.

$$u_h^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^n a_i^{(n)} \varphi_i(x). \quad (3)$$

Nieznane współczynniki $a_i^{(n)}$ obliczamy rozwiązując układ równań algebraicznych:

$$\int_{\Omega} [L(u_h^{(n)}) - B] \varphi_i d\Omega + \int_{\partial\Omega} [L^b(u_h^{(n)}) - B^b] \varphi_i d(\partial\Omega) = 0 \text{ dla } i=1, \dots, n. \quad (4)$$

Dobierając odpowiednio funkcje φ_i otrzymujemy metodę kolokacji, metodę elementów skończonych (jako szczególny przypadek metody Galerkin), metodę elementów brzegowych lub metodę różnic skończonych. Przybliżone rozwiązanie problemu brzegowego (1,2) otrzymujemy wstawiając rozwiązania układu równań (4) $a_h^{(n)}$ do wzoru (3). Z obliczeniowego punktu widzenia bardzo istotnym etapem obliczeń jest rozwiązanie układu równań nieliniowych (4). Istnieje bardzo wiele metod rozwiązania tego problemu [2,3,13,10,6]. Można tu przykładowo wymienić: metodę przyrostową, metodę iteracyjną nieprzyrostową, metody asymptotyczne oraz metody specjalne dostosowane do analizy ograniczonych klas zagadnień nieliniowych.

Jeżeli mamy do czynienia z układem mechanicznym, w których może jednocześnie występować kilka stanów równowagi [14], to równania równowagi będą mieć więcej niż jedno rozwiązanie. Taka sytuacja występuje również w zagadnieniach stateczności. Analizując fizyczną stronę zagadnienia zwykle możemy oszacować obszar X , w którym należy poszukiwać rozwiązania danego problemu brzegowego.

Z matematycznego punktu widzenia zagadnienie możemy sformułować następująco. Dla danej funkcji $g: \mathbb{R}^n \supset X \rightarrow \mathbb{R}^n$ i pewnego przedziału $X \subset \mathbb{R}^n$ znaleźć wszystkie pierwiastki równania:

$$g(x) = 0 \quad (5)$$

w obszarze X .

Należy podkreślić, że w ogólnym przypadku żadna z wymienionych metod rozwiązywania równań nieliniowych nie gwarantuje rozwiązania tego zagadnienia.

W ostatnich latach pojawiły się algorytmy oparte na matematyce przedziałowej [15,16,17], które pozwalają na znalezienie wszystkich pierwiastków równania $g(x)=0$ w danym n -wymiarowym przedziale X .

Celem pracy jest przedstawienie zastosowania tych algorytmów w nieliniowej mechanice konstrukcji.

^(*) Mgr inż. -Politechnika Śląska

2. Arytmetyka przedziałowa

Przez domknięty przedział rozumiemy następujący zbiór:

$$X = \{x: x^- \leq x \leq x^+\} \quad (6)$$

Zbiór wszystkich przedziałów oznaczymy przez $I(\mathbb{R})$. Dla dowolnych $a, b \in I(\mathbb{R})$ definiujemy dwuargumentowe działania zgodnie z wzorem:

$$a \circ b = \{x \circ y: x \in a, y \in b, \circ \in \{+, -, /\}\}, \quad (7)$$

oraz jednoargumentowe określone następującymi wzorami:

$$\text{mid}(a) = \frac{a^+ + a^-}{2}, \quad \text{rad}(a) = \frac{a^+ - a^-}{2}, \quad w(a) = w^+ - w^- \quad \text{dla } a \in I(\mathbb{R}). \quad (8)$$

Jeśli $A, B, C, D \in I(\mathbb{R})$ oraz " \circ " jest działaniem w zbiorze $I(\mathbb{R})$, to

$$\forall_{A, B, C, D \in I(\mathbb{R})} A \subseteq B \wedge C \subseteq D \Rightarrow A \circ C \subseteq B \circ D. \quad (9)$$

Własność ta zwana „inclusion isotonicity” jest jedną z najważniejszych w całej matematyce przedziałowej. Funkcją przedziałową nazywamy dowolną funkcję F określoną na przedziałowych argumentach X_1, \dots, X_n o wartościach w zbiorze przedziałów $I(\mathbb{R})$. Weźmy pod uwagę funkcję $f: \mathbb{R}^n \supseteq D_f \rightarrow \mathbb{R}$ i przedziałową funkcję $F: I(\mathbb{R}^n) \rightarrow I(\mathbb{R})$.

Przedziałową funkcję F będziemy nazywali przedziałowym rozszerzeniem funkcji f gdy:

$$\forall_{(x_1, \dots, x_n) \in D_f} f(x_1, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_n), \quad (10)$$

Przedziałowe rozszerzenie funkcji ma szereg interesujących własności, które są szczegółowo omówione np. w pracy [18,19]. Niech $X \in I(\mathbb{R}^n)$, przez naturalne rozszerzenie przedziałowe funkcji f na przedział X będziemy rozumieli wyrażenie arytmetyczne, które powstaje z wyrażenia arytmetycznego określającego funkcję f przez zastąpienie wszystkich zmiennych rzeczywistych x_i odpowiednimi przedziałami oraz wszystkich działań arytmetycznych, odpowiednimi działaniami na przedziałach. Naturalne przedziałowe rozszerzenie wyrażenia arytmetycznego $f(x)$ oznaczamy przez $F(X)$. Przykładowo naturalnym przedziałowym rozszerzeniem funkcji $f(x) = x^2 - x$ jest funkcja $F(X) = X^2 - X$, gdzie $x \in \mathbb{R}$ i $X \in I(\mathbb{R})$. Wartość funkcji F na interwale $[-1,1]$ wynosi:

$$F([-1,1]) = [-1,1] \cdot [-1,1] - [-1,1] = [-2,2] \quad (11)$$

Wartość funkcji f na n -wymiarowym interwale X oznaczamy $f(X)$ i określamy przy pomocy formuły:

$$f(X) = \{f(x): x \in X\} \quad (12)$$

Przykładowo gdy $f(x) = x^2 - x$, to $f([-1,1]) = \left[-\frac{1}{4}, 2\right]$. Naturalne rozszerzenie przedziałowe funkcji f charakteryzuje się bardzo ważną własnością:

$$\forall_{X \in I(\mathbb{R}^n)} f(X) \subseteq F(X). \quad (13)$$

Czyli wartość $f(X)$ zawsze możemy oszacować z góry i z dołu wartością rozszerzenia przedziałowego $F(X)$, ponadto znalezienie wartości $F(X)$ jest o wiele prostsze niż obliczenie $f(X)$. Podane własności naturalnego rozszerzenia przedziałowego, są podstawą algorytmu przedziałowej optymalizacji globalnej. Dowolną funkcję przedziałową F posiadającą własność (13) nazywamy funkcją inkluzyjną funkcji f .

3. Przedziałowa metoda Newtona

Weźmy pod uwagę ciągłą i różniczkowalną funkcję $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Będziemy poszukiwali rozwiązań równania $g(x)=0$ w danym n -wymiarowym przedziale X . Podstawową zaletą przedziałowej metody Newtona jest to, że daje ona możliwość znalezienia wszystkich pierwiastków w danym przedziale X , co jest niewykonalne gdy użyjemy klasycznego algorytmu. Kolejne kroki algorytmu podane są w pracach [15,16,18,20] tutaj ograniczymy się do przedstawienia najważniejszych idei.

Można pokazać (patrz np. [16,20]), że z twierdzenia Lagrange’a wynika wzór:

$$g_j(y) \in g_j(x) + \sum_{i=1}^n (y_i - x_i) \frac{\partial g_j(X_1, \dots, X_i, X_{i+1}, \dots, X_n)}{\partial x_i} \quad 0 \text{ dla } j=1, \dots, n \quad (14)$$

lub w postaci macierzowej:

$$g(y) \in g(x) + J(X, x)(y - x) \quad (15)$$

gdzie $0, X = \left[[x_1^-, x_1^+], \dots, [x_n^-, x_n^+] \right] = [X_1, \dots, X_n], y \in X, x_i = \text{mid}(X_i), x = [x_1, \dots, x_n],$

$$J(X, x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(X_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1(X_1, \dots, X_n)}{\partial x_n} \\ \dots & \frac{\partial g_j(X_1, \dots, X_i, x_{i+1}, \dots, x_n)}{\partial x_i} & \dots \\ \frac{\partial g_n(X_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_n(X_1, \dots, X_n)}{\partial x_n} \end{bmatrix} 00.$$

Dla ustalonej wartości x określimy zbiór:

$$S = \{y \in R^n : g(x) + J(x', x)(y - x) = 0, x' \in X\} 0 \quad (16)$$

zbiór ten zawiera wszystkie wektory y , dla których $g(y)=0$. Ideą przedziałowej metody Newtona jest kolejne zmniejszanie przedziału X tak długo, aż S będzie tak małe jak będziemy tego sobie życzyć. Przez Y oznaczymy najmniejszy n -wymiarowy przedział zawierający rozwiązanie przedziałowego układu równań:

$$g(x) + J(X, x)(y - x) = 0. \quad (17)$$

lub

$$Ay = B, 0 \quad (18)$$

gdzie $A=J(X, x)$, $B=J(X, x)x-f(x)$, a $J(.,.)$ oznacza przedziałowe rozszerzenie zwykłego jacobianu. Rozwiązanie przedziałowego układu równań (18) oznaczymy przez $\Sigma(A, B)$ i określimy następująco:

$$\Sigma(A, B) = \{y \in R^n : \tilde{A}y = \tilde{B}, \tilde{A} \in A, \tilde{B} \in B\}. 0 \quad (19)$$

Metody rozwiązywania przedziałowych układów równań liniowych przedstawione są w pracach [17,21]. Niech Y oznacza najmniejszy n -wymiarowy przedział zawierający zbiór $\Sigma(A, B)$. Funkcję, która określa zbiór Y na podstawie zbioru $\Sigma(A, B)$ oznaczymy przez $\text{hull}(\cdot)$, tzn. $Y = \text{hull} \Sigma(A, B)$. Z definicji zbioru S wynika, że $S \subseteq Y$ por.[15,18,20]0.

Poniżej podajemy iteracyjny algorytm przedziałowej metody Newtona:

- 1) Ustalić początkowe oszacowanie zbioru rozwiązań $X = X_1$, przyjmując $k=1$.
- 2) Obliczyć przedziałowe macierze A_k i B_k :
- 3) $A_k = J(X_k, \text{mid}(X_k))$.
- 4) $B_k = J(X_k, \text{mid}(X_k)) \cdot \text{mid}(X_k) - g(\text{mid}(X_k))$.
- 5) Obliczyć $Y_k = \text{hull} \Sigma(A_k, B_k)$.
- 6) Obliczyć $X_{k+1} = Y_k \cap X_k$.
- 7) Sprawdzić kryteria zatrzymania obliczeń (np. możemy ograniczyć liczbę iteracji).
- 8) Skok do punktu 1.

4. Przedziałowa metoda bisekcji

Rozważymy równanie

$$g(x) = 0 \quad (20)$$

gdzie $g: R^n \supset D \rightarrow R^n$ jest daną funkcją a D jest wielowymiarowym przedziałem $D = \prod_{i=1}^n [d_i^-, d_i^+]$. Niech

$G: I(R)^n \rightarrow I(R)$ będzie funkcją inkluzyjną dla funkcji g . Z własności „inclusion isotonicity” arytmetyki przedziałowej wynika, że jeżeli:

$$0 \notin G(D) \quad (21)$$

gdzie $G(\cdot)$ jest funkcją inkluzyjną (np. naturalnym rozszerzeniem przedziałowym), to funkcja $g(x)$ nie ma pierwiastków w obszarze D . Metoda bisekcji (porównaj [22]) oparta jest na własności (21) i w przypadku wielowymiarowym obliczenia możemy przeprowadzać zgodnie z następującym algorytmem:

1. Przyjąć $Y=D$.
2. Zainicjować listę $L=\{Y\}$.
3. Obliczyć $k = \min \left\{ j \in \{1, \dots, n\} : w(Y_j) = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} w(Y_i) \right\}$ oraz podzielić Y wzdłuż współrzędnej k otrzymując dwa podprzedziały V_1, V_2 tak, że $Y = V_1 \cup V_2$, oraz $\text{Int}V_1 \cap \text{Int}V_2 = \emptyset$.
4. Jeśli $0 \notin G(V^i)$ ($i=1,2$), to usunąć element V_i z listy L , w przeciwnym przypadku dołączyć przedział V_i na koniec listy L .

5. Jeśli lista L jest pusta, to równanie $g(x)=0$ nie posiada pierwiastków w przedziale D i należy zakończyć obliczenia.
 6. Jeśli $\max_{V \in L} w(V) < \varepsilon$, to idź do punktu 8.
 7. Oznacz pierwszy element listy L przez Y i przejdź do punktu 3.
 8. Wszystkie pierwiastki równania $g(x)=0$ znajdują się w przedziałach z listy L. Zakończ obliczenia.
- Należy podkreślić, że do stosowania metody bisekcji potrzeba i wystarcza aby dla funkcji $g(x)$ istniała funkcja inkluzyjna $G(X)$, czyli odwzorowanie g może być w ogólności nieróżniczkowalne, a nawet nieciągłe.

5. Metoda minimalizacji

5.1 Przedziałowa optymalizacja globalna

Szczegółowy opis algorytmu znajduje się w pracach [19,20,23,24,26,27], tutaj ograniczymy się do przedstawienia jedynie jego najważniejszych elementów. Będziemy rozważali odwzorowanie f określone na n -wymiarowym przedziale X_0 o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych R . Poszukujemy ekstremalnych wartości funkcji f określonej na zbiorze X tzn. liczb:

$$f^- = \inf\{f(x) : x \in X\} \text{ i } f^+ = \sup\{f(x) : x \in X\} .0 \quad (22)$$

Przedziałowa optymalizacja globalna jest jedynym istniejącym algorytmem, który gwarantuje oszacowanie globalnego minimum dla dowolnej nieliniowej funkcji celu z 100% gwarancją wyników i uwzględnieniem błędów zaokrąglenia.

5.1.1 Podstawowy algorytm

Algorytm globalnej optymalizacji opiera się na następującym schemacie (algorytm Hansena [27]):

1. Przyjąć $Y=X$.
2. Obliczyć $F(Y)$ i $\bar{f} = \max F(\text{mid}(Y))$.
3. Przyjąć $y = \min F(Y)$.
4. Zainicjować listę $L = \{(Y, y)\}$.
5. Obliczyć $k = \min\left\{j : w(Y_j) = \max_i w(Y_i), j \in \{1, \dots, n\}\right\}$.
6. Podzielić przedział Y na dwie równe części V_1, V_2 wzdłuż kierunku k .
7. Obliczyć $F(V_1), F(V_2)$.
8. Przyjąć $v_i = \min F(V_i)$ dla $i=1,2$.
9. Dołączyć pary $(V_1, v_1), (V_2, v_2)$ na koniec listy L.
10. Usunąć z listy L wszystkie pary (Z, z) dla których spełniona jest zależność $\bar{f} < z$ (test punktu środkowego).
11. Jeśli spełnione są kryteria zbieżności przejdź do punktu 14.
12. Zaznacz pierwszą parę listy L jako (Y, y) . Przyjąć $\bar{f} = \min\{\bar{f}, \max F(\text{mid}(Y))\}$.
13. Skok do punktu 5.
14. Koniec obliczeń.

W celu przyspieszenia zbieżności algorytmu wprowadzono pewne dodatkowe procedury, które zostaną opisane poniżej.

5.1.2 Sprawdzenie monotoniczności

Jako kryterium monotoniczności można przyjąć następujący warunek konieczny:

$$\forall_{x \in X} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \neq 0 .0 \quad (23)$$

Stąd jeśli $0 \notin \frac{\partial F(X)}{\partial x_i}, 0$ to wtedy funkcja jest monotoniczna w X . W przypadku stwierdzenia monotoniczności ekstremalne wartości funkcji f na pewno znajdują się na brzegach przedziału X i możemy w dalszych obliczeniach używać punktowych wartości x_i^-, x_i^+ . Aby można było stosować tę procedurę funkcja f musi być klasy C^1 .

5.1.3 Test punktu środkowego

W klasycznym algorytmie aby odrzucić przedział X_2 wystarczy by spełniona była nierówność:

$$F(X_1) < F(X_2). \quad (24)$$

Oczywiście, jeśli spełniona jest nierówność:

$$f(\text{mid}(X_1)) < F(X_2), \quad (25)$$

to globalne minimum również (na pewno) nie znajdzie się w przedziale X_2 i możemy go odrzucić. Procedurę sprawdzającą nierówność (25) nazywamy testem punktu środkowego. W ogólności lewa strona nierówności (25) może być obliczona dla dowolnej wartości x_0 z przedziału X_1 . Aby stosować test punktu środkowego dla danej funkcji f musi istnieć jedynie funkcja inkluzyjna $F(X)$, czyli f może być nieróżniczkowalna, a nawet nieciągła.

5.1.4 Sprawdzenie wypukłości funkcji

Jeśli funkcja $f(x)$ posiada minimum w punkcie x_0 , to jest w otoczeniu tego punktu wypukła. Czyli hesjan H tej funkcji jest w otoczeniu tego punktu dodatnio określony. Warunkiem koniecznym dodatniej określoności Hesjanu jest by diagonalne elementy hesjanu tzn. H_{ii} były nieujemne ($H_{ii} \geq 0$). Jeśli

$$H_{ii}(X) < 0 \quad (26)$$

dla jakiegokolwiek $i \in \{1, \dots, n\}$, to w przedziale X brak lokalnych minimów. W przypadku gdy przedział X nie ma wspólnych ścian z brzegiem wyjściowego obszaru X_0 , to możemy go odrzucić w dalszych obliczeniach. Aby można było stosować test wypukłości funkcja musi być klasy C^2 .

5.1.5 Przedziałowa metoda Newtona

Punkty stacjonarne funkcji f spełniają następujące równanie:

$$\text{grad } f(x) = 0. \quad (27)$$

W celu znalezienia pierwiastków równania (27) stosujemy przedziałową metodę Newtona. Przy pomocy, której znajdziemy wszystkie pierwiastki lub stwierdzimy ich brak. Gdy dany przedział nie zawiera punktów stacjonarnych oraz nie posiada wspólnego brzegu z początkowym przedziałem X , to możemy go pominąć w dalszych obliczeniach, ponieważ na pewno nie zawiera globalnego minimum. Aby można było stosować tę procedurę funkcja f musi być klasy C^2 [20].

5.1.6 Dobór odpowiedniej funkcji inkluzyjnej

Użycie specjalnych funkcji inkluzyjnych, zamiast naturalnego przedziałowego rozszerzenia, prowadzi zwykle do przyspieszenia zbieżności algorytmu. Korzystając z twierdzenia Lagrange'a można pokazać, że:

$$f(X) \subseteq f(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F(X)}{\partial x_i} (X_i - x_i), \quad (28)$$

gdzie $x \in X$ oraz $\frac{\partial F(\cdot)}{\partial x}$ jest funkcją inkluzyjną w pochodnej $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Inne sposoby budowania funkcji inkluzyjnych można znaleźć w pracy [25].

5.2 Algorytm metody minimalizacji

W pracy [28] J. Pinter pokazał, że rozwiązania równania $g(x)=0$ ($g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$) jest równoważne problemowi minimalizacji funkcjonału:

$$f(x) = \|g(x)\| \quad (29)$$

gdzie $\|\cdot\|$ jest dowolną normą w przestrzeni \mathbb{R}^n np. $\|g(x)\| = \|g(x)\|_1 = \sum_{i=1}^n |g_i(x)|$, $\|g(x)\| = \|g(x)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n g_i^2(x)}$

itp.. Równoważność problemów wynika z aksjomatów normy $\|\cdot\|$ ($\|g(x)\| = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$). Ponieważ funkcjonał $f(x)$ może być bardzo skomplikowaną nieliniową funkcją, dlatego jako algorytmu poszukującego minimum przyjmujemy algorytm przedziałowej optymalizacji globalnej.

6. Przykłady zastosowań

6.1 Ogólne informacje o nieliniowych równaniach algebraicznych MES

Jak wiadomo (porównaj [2,3,4,8]) w przypadku materiałów sprężystych po zastosowaniu skończonej elementowej aproksymacji pola przemieszczeń równania równowagi mają następującą postać:

$$\left(K_0^{ab} + K_1^{ab}(q(t)) + K_2^{ab}(q(t))\right)q_b(t) = Q^a(t) \quad (30)$$

Równanie (30) można w skrócie zapisać w postaci:

$$K^{ab}(q(t))q_b(t) = Q^a(t) \quad (31)$$

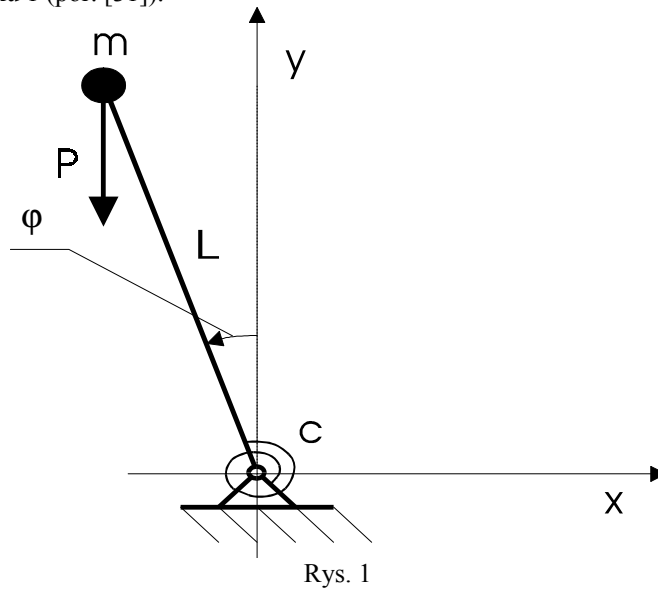
Ogólnie można przyjąć, że nieprzyrostowe równania MES (metody odchyłek ważonych), są następującej postaci (porównaj [2,3,4,6,8,10]):

$$K(q)q=Q. \quad (32)$$

gdzie q jest wektorem uogólnionych przemieszczeń, czyli są to układy nieliniowych równań algebraicznych.

6.2 Przykład numeryczny

W charakterze przykładu rozpatrzmy zadanie, w którym należy określić położenia równowagi układu przedstawionego na rysunku 1 (por. [31]).



Równanie równowagi w tym przypadku mają następującą postać:

$$P \cdot L \cdot \sin(\varphi) = c \cdot \varphi \quad (33)$$

gdzie $P=mg$ jest ciężarem ciała, L jest długością pęta, c jest stałą sprężystości liniowej sprężyny oraz $\varphi \in (-\varphi_0, \varphi_0)$ jest kątem, o który obrócił się pręt od położenia początkowego. Równanie (33) można przekształcić do następującej postaci:

$$k\varphi - \sin(\varphi) = 0 \quad (34)$$

gdzie $k = \frac{c}{P \cdot L}$. W celu uproszczenia obliczeń przyjmujemy $k = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

Stosując przedziałową metodę Newtona otrzymujemy rezultaty przedstawione w tabeli 1.

Tabela 1 Rozwiązania otrzymane przedziałową metodą Newtona

Liczba iteracji	Początkowe przedziały [rad]		
	$\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
2	[-2.167, -2.0735]	X	[2.073, 2.167]
3	[-2.0957, -2.0935]	X	[2.0935, 2.0957]
4	[-2.094394, -2.094393]	X	[2.094393, 2.094394]

Podczas obliczeń pierwiastka w przedziale $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ wystąpił błąd dzielenia przez przedział zawierający 0.

Trudności tej można uniknąć stosując uogólnioną arytmetykę Kaucher'a [30,31]. Należy dodać, że stosując arytmetykę Kaucher'a możemy dowolnie dobrać przedział początkowy.

Stosując przedziałową metodę bisekcji otrzymujemy następujące pierwiastki równania:

Tabela 2 Przedziałowe rozwiązania otrzymane metodą bisekcji

Liczba iteracji	Elementy listy L spełniające warunek $0 \in F(X)$ [rad]
10	$[-2.356, -1.963], [-0.393, 0], [0, 0.785], [1.571, 2.356]$
20	$[-2.160, -1.963], [-1.196, 0], [0, 1.96], [1.963, 2.356]$
30	$[-2.160, -2.062], [-0.098, 0], [0, 0.098], [2.061, 2.160]$
40	$[-2.111, -2.086], [-0.049, 0], [0, 0.049], [2.062, 2.111]$

Rozwiązanie dokładne $\varphi_1 = -\frac{2\pi}{3}$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = \frac{2\pi}{3}$.

Wyniki obliczeń metodą minimalizacji wg. algorytmu Hansena przedstawia tabela 3.

Tabela 3 Przedziałowe rozwiązania otrzymane metodą minimalizacji

Liczba iteracji	Elementy listy L [rad]
20	$[-2.160, -2.062], [-2.062, -1.963], [-0.393, -0.196], [-0.196, 0], [0, 0.196], [0.196, 0.392], [1.963, 2.160]$
30	$[-2.111, -2.086], [-2.086, -2.061], [-0.098, -0.049], [-0.049, 0], [0, 0.049], [0.049, 0.098], [2.061, 2.111]$
40	$[-2.098, -2.092], [-2.092, -2.086], [-0.025, -0.012], [-0.012, 0], [0, 0.012], [0.012, 0.025], [2.086, 2.098]$

7. Wnioski

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że przedziałowa metoda Newtona jest najszybciej zbieżną metodą spośród przedstawionych przedziałowych metod rozwiązywania równań nieliniowych. Jednak metoda ta wymaga aby funkcja $g(x)$ była klasy C^2 . Ponadto w przypadku, jeśli w przedziale początkowym X będzie więcej rozwiązań, to algorytm będzie zbieżny do zbioru, który zawiera wszystkie pierwiastki i wtedy nie otrzymamy oszacowania wartości punktowych. (W pracy [17] znajduje się opis zmodyfikowanego algorytmu przedziałowej metody Newtona, który jest zawsze zbieżny do wartości punktowych.)

Przedziałową metodę bisekcji możemy stosować nawet w przypadku gdy funkcja g jest nieróżniczkowalna i nieciągła (powinna mieć jedynie określoną funkcję inkluzyjną) jednak algorytm ten jest stosunkowo wolno zbieżny. Ponadto kryterium $0 \in G(X)$ jest warunkiem wystarczającym, ale nie koniecznym istnienia pierwiastka równania $g(x)=0$ w przedziale X . Dlatego wyniki otrzymane tą metodą należy zweryfikować innymi metodami. Metoda ta jest bardzo efektywnym i uniwersalnym narzędziem do stwierdzania braku pierwiastków równania $g(x)=0$ w danym przedziale X .

Metoda minimalizacji może być stosowana do dowolnych przedziałami ciągłych funkcji $g(x)$. Może być również zastosowana do poszukiwania rozwiązań równań sprzecznych w sensie metody najmniejszych kwadratów. Jednak podobnie jak w przypadku metody bisekcji otrzymujemy jedynie oszacowanie rozwiązania i nie mamy pewności, czy w danym przedziale wynikowym X znajduje się rozwiązanie (tzn. $\exists_{x \in X} \|g(x)\| = 0$), czy jedynie lokalne minimum (tzn. $\forall_{x \in X} \|g(x)\| > 0$).

Przedstawione algorytmy umożliwiają znalezienie wszystkich pierwiastków nieliniowych równań algebraicznych mechaniki konstrukcji w danym n -wymiarowym przedziale X i mogą zostać efektywnie wykorzystane do rozwiązywania szerokiej klasy zagadnień praktycznych.

Literatura

- [1] Hanyga A.: Mathematical Theory of Non-Linear Elasticity. PWN, Warszawa, 1985
- [2] Kleiber M. Woźniak Cz.: Nonlinear Mechanics of Structures. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, 1991
- [3] Kleiber M.(red.): Mechanika Techniczna. Tom XI. Komputerowe metody mechaniki cia³ sta³ych. PWN Warszawa, 1995
- [4] Kleiber M.: Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum. PWN, Warszawa, 1985
- [5] Oden J.T. (ed.): Computational Methods in Nonlinear Mechanics. North-Holland, New-York, 1980

- [6] Waszczyszyn Z., Cichoń Cz., Radwańska M.: Metoda elementów skończonych w stateczności konstrukcji. Arkady, Warszawa, 1990
- [7] Wesołowski Z., Woźniak Cz.: Podstawy nieliniowej teorii sprężystości. PWN, Warszawa, 1970
- [8] Woźniak Cz., Kleiber M.: Nieliniowa mechanika konstrukcji. PWN, Warszawa, 1982
- [9] Burczyński T.: Metoda elementów brzegowych w mechanice. WNT, Warszawa, 1995
- [10] Rakowski G., Kacprzyk Z.: Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 1993
- [11] Zienkiewicz O.C.: Metoda elementów skończonych. Arkady, Warszawa, 1972
- [12] Mohnacki B., Suchy J.S.: Modelowanie i symulacja krzepnięcia odlewów. PWN, Warszawa, 1993
- [13] Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P.: Numerical Recipes in FORTRAN. The Art of Scientific Computing. Cambridge University Press, New York, 1992
- [14] Kurnik W.: Bifurkacje dywergencje i oscylacje. WNT, Warszawa, 1997.
- [15] Alefeld G., Herzberger J.: Introduction to Interval Computation. Academic Press, New York, 1983
- [16] Moore R.E.: Interval analysis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1966
- [17] Neumaier A.: Interval methods for system of equations. Cambridge University Press, 1990
- [18] Alefeld G., Frommer A.: Scientific Computing and Validated Numerics. Proceedings of the International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic and Validated Numeric SCAN'95 held in Wuppertal, Germany, September 26-29, 1995
- [19] Csendes T., Ratz D.: Subdivision direction selection in interval methods for global optimization. SIAM J. Numer. Anal. Vol. 34, No. 3, 1997, s. 922-938
- [20] Hansen E.: Global optimization using interval analysis. New York, Marcel Dekker, 1992
- [21] Kulpa Z., Pownuk A., Skalna I.: Analysis of linear mechanical structures with uncertainties by means of interval methods. Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, Vol. 5 (1998), 38 s.
- [22] Benedetti A., Guglielmi N.: Tracing characteristics of smooth nonlinear resistive circuits by interval analysis. Proceedings of ISCAS-96, Atlanta May. 12-15, 1996
- [23] A Local Interval Arithmetic Library for Discontinuous Intervals. User's Manual Version 2.0. Delisoft, Helsinki, Finland, 1997
- [24] Kolev L.V.: Interval Methods for Circuit Analysis. World Scientific, New Jersey, 1993
- [25] Ratschek, H., Rokne J.: Computer methods for the range of functions. Ellis Horwood, Chichester, 1984
- [26] Skrzypczyk J., Pownuk A.: O pewnej metodzie określania górnego ograniczenia wielkości mechanicznych w warunkach przedziałowych nieokreśloności parametrów ich matematycznego modelu. Zeszyty Naukowe Katedry Mechaniki Stosowanej nr 7, XXXVI Sympozjon PTMTS "Modelowanie w Mechanice", Wisła, 1998, s. 323-328
- [27] Ratschek, H., Rokne J.: New Computer method for global optimization. John Wiley & Sons, New York, 1988
- [28] Pinter J.: Solving Nonlinear Equation Systems Via Global Partition and Search: Some Experimental Results. Computing 43, 1990, s. 309-323
- [29] Kaucher, E.: Interval analysis in the extended interval space. Computing. Supp. 2 (1980), s. 33-49
- [30] Tupper J.A.: Graphing Equations with Generalized Interval Arithmetic. Toronto, 1996 (<http://www.dgp.utoronto.ca/people/mooncake/msc.html>)
- [31] Borkowski Sz.: Mechanika ogólna. Dynamika Lagrange'a i Hamiltona. Stateczność. Skrypt Politechniki Śląskiej nr 1642, Gliwice, 1993

INTERVAL METHODS FOR SOLUTION OF NONLINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS OF STRUCTURAL MECHANICS

Summary

In this paper new solution methods for system of nonlinear algebraic equations are presented. These methods are based on interval mathematics. Presented methods can find all solution of given system of equation $g(x)=0$ in n -dimensional interval X . Function $g(x)$ can be twice continuously differentiable, continuous or even not continuous, which depends on method. Using interval methods nonlinear algebraic equations of structural mechanics are solved. An illustrative numerical example is included.