

**Zastosowanie teorii zbiorów rozmytych
do oceny niezawodności
konstrukcji budowlanych**

Andrzej Pownuk

Politechnika Śląska
Wydział Budownictwa
Zakład Mechaniki Teoretycznej

Spis treści

Sformułowanie problemu niezawodności konstrukcji z niepewnymi parametrami.

Różne interpretacje funkcji przynależności zbioru rozmytego.

Niezawodność konstrukcji o parametrach losowych i rozmytych.

Metody rozwiązywania równań rozmytych.

Zastosowanie algorytmu przedziałowej optymalizacji globalnej do modelowania układów z przedziałowymi parametrami.

Wnioski

Niezawodność konstrukcji w ujęciu probabilistycznym

$$R = P_{\Omega}(\{\omega : g(\mathbf{X}(\omega)) > 0\})$$

gdzie $\mathbf{X}_{\Omega} : \Omega \ni \omega \rightarrow \mathbf{X}_{\Omega}(\omega) \in R^n$ jest wektorem losowym oraz $(\Omega, \Sigma_{\Omega}, P_{\Omega})$ jest przestrzenią probabilistyczną.

Zmienne losowe o wartościach zbiorowych

Niech dana jest zmienna losowa o wartościach zbiorowych

$$\mathbf{X}_\Gamma : \Gamma \ni \gamma \rightarrow \mathbf{X}_\Gamma(\gamma) \in 2^{R^n}$$

gdzie $(\Gamma, \Sigma_\Gamma, P_\Gamma)$ jest pewną przestrzenią probabilistyczną.

Górne i dolne prawdopodobieństwo zniszczenia konstrukcji

$$P_f^+ = P_\Gamma(\{\gamma : g(x) \leq 0, x \in \mathbf{X}_\Gamma(\gamma)\})$$

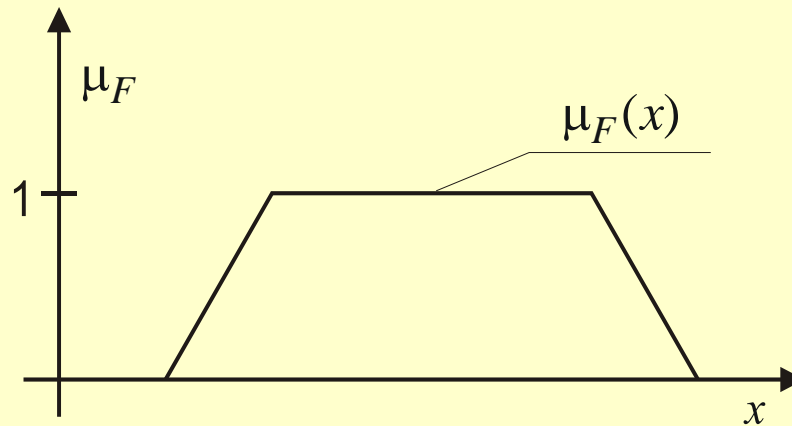
$$P_f^+ = P_\Gamma(\{\gamma : g(\mathbf{X}_\Gamma(\gamma)) \cap (-\infty, 0] \neq \emptyset\})$$

$$P_f^- = P_\Gamma(\{\gamma : g(\mathbf{X}_\Gamma(\gamma)) \subseteq (-\infty, 0]\})$$

PODSTAWY TEORII ZBIORÓW ROZMYTYCH

Zbiorem rozmytym F w przestrzeni X
nazywamy dowolne odwzorowanie

$$\mu_F : X \ni x \rightarrow \mu_F(x) \in [0, 1] \subseteq R$$



Działania na zbiorach rozmytych

$$\forall x \in X, \mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

$$\forall x \in X, \mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

$$\forall x \in X, \mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

Zasada rozszerzania:

$$\mu_{f(F)}(y) = \sup_{f(x_1, \dots, x_n) = y} \min\{\mu_{F_1}(x_1), \dots, \mu_{F_n}(x_n)\}$$

"However, for many Fuzzy Set theorists, there exists another part of fuzzy set theory. This is the claim that the concept of a partial grade of membership of an object or an attribute value in a class **does not have a probabilistic interpretation**. I consider this claim to be a **pure DOGMA** which is not worthy of a serious scientific theory."

Prof. Ellen Hissdal

<http://www.dbai.tuwien.ac.at/marchives/fuzzy-mail99/0142.html>

I can only speak for myself ('fuzzy settians' with other ideas are on their own), but to my way of thinking, **fuzzy logic is less a 'scientific theory' than it is a useful engineering tool.** Comparisons to deductive logic and probability theory are important, but I do not think they define fuzzy logic well. **I prefer to consider what role fuzzy logic plays, and how it does so to understand what it is.** At the bottom level, fuzzy logic uses mathematical distributions (yes, like probability distributions). Whether we wish to give the numbers which comprise those distributions a probabilistic interpretation would seem to be a matter of context, not 'dogma', to me.

Will Dwinnell

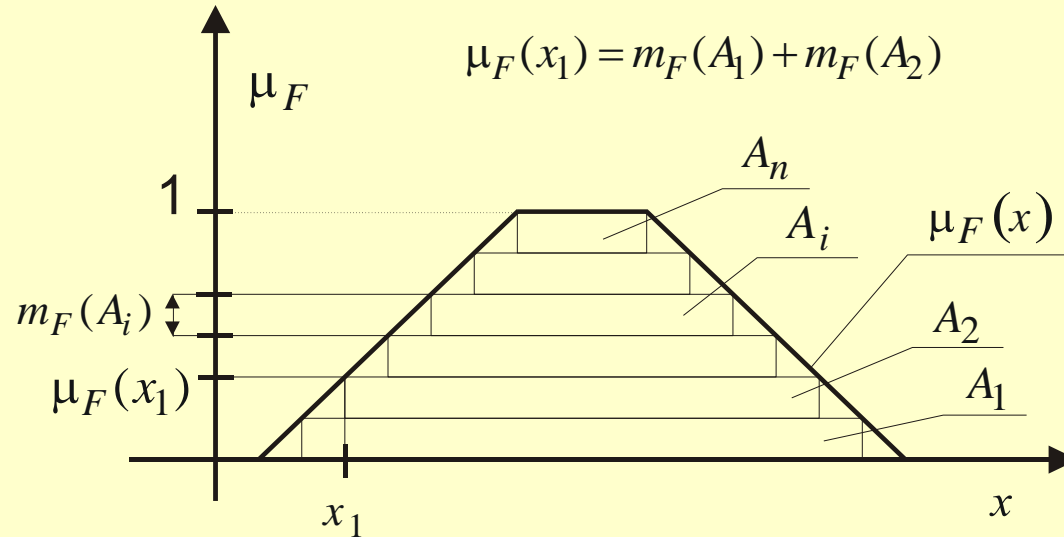
<http://www.dbai.tuwien.ac.at/marchives/fuzzy-mail99/0142.html>

Interpretacja funkcji przynależności oparta na teorii zbiorów losowych

Zbiorem losowym w przestrzeni X (ze skończonym nośnikiem) nazywamy parę (Ξ_F, m_F) , gdzie Ξ_F jest skończoną rodziną podzbiorów przestrzeni X , a m_F jest funkcją $m_F : \Xi_F \rightarrow [0, 1]$ taką, że $\sum_{A_i : A_i \in \Xi_F} m_F(A_i) = 1$.

Niech dany jest pewien zbiór X . Zbiorem losowym nazywamy miarę probabilistyczną określoną na zbiorze wszystkich podzbiorów zbioru X .

Funkcja przynależności



$$\mu_F(x) = \sum_{A: x \in A, A \in \Xi_F} m_F(A)$$

lub

$$\mu_F(x) = P_{\Gamma}(\{\gamma : x \in X_{\Gamma}(\gamma)\})$$

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n$$

Probabilistyczna interpretacja funkcji przynależności zbioru rozmytego

Niech dana jest przestrzeń probabilistyczna $(\Gamma, \Sigma_\Gamma, P_\Gamma)$. Na przestrzeni $(\Gamma, \Sigma_\Gamma, P_\Gamma)$ określona jest zmienna losowa $X_\Gamma : \Gamma \ni \gamma \rightarrow X_\Gamma(\gamma) \in R$. W zbiorze Γ określamy podzbiór F .

Zbiór F jest określony na drodze doświadczalnej.

Funkcję przynależności można określić następująco:

$$\mu_F(x) = P_\Gamma(\{\gamma : \gamma \in F \mid X_\Gamma(\gamma) = x\})$$

czyli

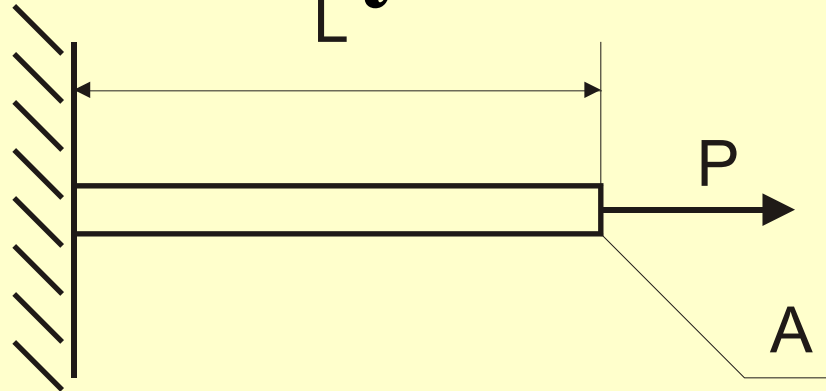
$$\mu_F(x) = \frac{P_\Gamma(\{\gamma : \gamma \in F, X_\Gamma(\gamma) = x\})}{P_\Gamma(\{\gamma : X_\Gamma(\gamma) = x\})}$$

Przestrzeń Δ


Niech dana jest przestrzeń probabilistyczna $(\Delta, \Sigma_\Delta, P_\Delta)$. Załóżymy, że zbiór Δ jest liniowo uporządkowany przy pomocy relacji $<$.

$$\delta_1 < \delta_2 < \dots \quad \text{dla} \quad \delta_i \in \Delta$$

Przykład



P [kN]	12	15	18	21	24
Ekspert 5					
Ekspert 4					
Ekspert 3					
Ekspert 2					
Ekspert 1					
$\mu_F(P)$	0.4	1	0.4	0.4	0.2

 - pozytywna odpowiedź eksperta

Funkcja $\Theta_X(x)$

$$\Theta_X(x) = \{\delta \in \Delta : \delta < \delta_{N(x)+1}, P_\Delta(\Theta_X(x)) = \mu_F(x)\}$$

Z definicji zbioru $\Theta_X(x)$ wynika, że:

$$\mu_F(x) = P_\Delta\{\Theta_X(x)\}$$

$$\Theta_X(x) = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{N(x)}\}$$

$$\delta_1 < \delta_2 < \dots < \delta_{N(x)}$$

$\Theta_X(x)$ zawiera wszystkie elementy zbioru Δ mniejsze od $\delta_{N(x)+1}$.

Przykład

P [kN]	12	15	18	21	24
Ekspert 5					
Ekspert 4					
Ekspert 3					
Ekspert 2					
Ekspert 1					
$\mu_F(P)$	0.4	1	0.4	0.4	0.2

$$\Theta_X(12 [kN]) = \{\delta_1, \delta_2\}$$

$$\Theta_X(15 [kN]) = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5\}$$

$$\Theta_X(24 [kN]) = \{\delta_1\}$$

Własności funkcji $\Theta_X(x)$

Jeśli $\mu_F(x) < \mu_F(y)$, to $\Theta_X(x) \subset \Theta_X(y)$

Jeśli $\mu_F(x) = \mu_F(y)$, to $\Theta_X(x) = \Theta_X(y)$

Jeśli $\mu_F(x) > \mu_F(y)$, to $\Theta_X(x) \supset \Theta_X(y)$

Prawdopodobieństwo zniszczenia konstrukcji o parametrach rozmytych

$$P_f = P_\Delta(\{\delta : \delta \in \Theta(\gamma), \gamma \in F, g(\mathbf{h}_\Gamma(\gamma)) < 0\})$$

$$P_f = P_\Delta\left(\bigcup_{\mathbf{h}: g(\mathbf{h}) < 0} \Theta_{\mathbf{h}}(\mathbf{h})\right) = \sup_{\mathbf{h}: g(\mathbf{h}) < 0} \mu_F(\mathbf{h})$$

Przykład

P [kN]	12	15	18	21	24
Ekspert 5					
Ekspert 4					
Ekspert 3					
Ekspert 2					
Ekspert 1					
$\mu_F(P)$	0.4	1	0.4	0.4	0.2
$g(P)$	55	25	-5	-35	-65

$$g = \sigma_0 - \frac{P}{A}$$

$$P_f = \sup_{P: g(P) < 0} \mu_F(P) = \max\{0.4, 0.4, 0.2\} = 0.4$$

Prawdopodobieństwo zniszczenia konstrukcji o parametrach losowych i rozmytych

$$P_f = P_{\Omega \times \Delta}(\{(\omega, \delta) : \delta \in \Theta_{\mathbf{h}}(\mathbf{h}), g(\mathbf{X}_{\Omega}(\omega), \mathbf{h}) < 0, \omega \in \Omega, \mathbf{h} \in R^{n_F}\})$$

$$P_f = \sum_{\mathbf{x}: \mathbf{x} = \mathbf{X}(\omega), \omega: \omega \in \Omega} P_{\Omega}(\{\mathbf{x}\}) \cdot \sup_{\mathbf{h}: g(\mathbf{x}, \mathbf{h}) < 0} \mu_F(\mathbf{h})$$

$$P_f = E_{\Omega} \left(\sup_{\mathbf{h}: g(\mathbf{x}, \mathbf{h}) < 0} \mu_F(\mathbf{h}) \right)$$

Prawdopodobieństwo zniszczenia konstrukcji o parametrach losowych i rozmytych

$$\mu_{g(F)}(\mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{h}: g(\mathbf{x}, \mathbf{h}) < 0} \mu_F(\mathbf{h})$$

$$P_f = E_{\Omega}(\mu_{g(F)}(\mathbf{x})) = \sum_{\mathbf{x}} \mu_{g(F)}(\mathbf{x}) P_{\Omega}(\{\mathbf{x}\})$$

$$P_f = \int_{R^n} \mu_{g(F)}(\mathbf{x}) dP_{\Omega}(\mathbf{x})$$

Przykład

σ_0 [MPa]	179	177	175	173	171
Liczba pomiarów	15	15	10	5	5
Częstość względna	0.3	0.3	0.2	0.1	0.1

P [kN]	14.5	17.5	20.5	23.5	26.5
Ekspert 5					
Ekspert 4					
Ekspert 3					
Ekspert 2					
Ekspert 1					
$\mu_F(P)$	0.4	1	0.4	0.4	0.2

		$g(P, \sigma)$				
P [kN]		14.5	17.5	20.5	23.5	26.5
$\mu_F(P)$		0.4	1	0.4	0.4	0.2
$\mu_{\sigma(F)}(179)$	0.4	34 [MPa]	6 [MPa]	-26 [MPa]	-56 [MPa]	-86 [MPa]
$\mu_{\sigma(F)}(177)$	0.4	32 [MPa]	2 [MPa]	-28 [MPa]	-58 [MPa]	-88 [MPa]
$\mu_{\sigma(F)}(175)$	0.4	30 [MPa]	0 [MPa]	-30 [MPa]	-60 [MPa]	-90 [MPa]
$\mu_{\sigma(F)}(173)$	1	28 [MPa]	-2 [MPa]	-32 [MPa]	-62 [MPa]	-92 [MPa]
$\mu_{\sigma(F)}(171)$	1	26 [MPa]	-4 [MPa]	-34 [MPa]	-64 [MPa]	-94 [MPa]

$$P_f = \sum_{\sigma} P_{\Omega}(\{\sigma\}) \cdot \mu_{\sigma(F)}(\sigma) = 0.3 \cdot 0.4 + 0.3 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 1 + 0.1 \cdot 1 = 0.48$$

Prawdopodobieństwo zniszczenia konstrukcji o parametrach losowych i zbiorowych (przedziałowych)

$$\mu_{g(F)}(\mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{h}: g(\mathbf{x}, \mathbf{h}) < 0} \mu_F(\mathbf{h}) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \{\mathbf{h}: g(\mathbf{x}, \mathbf{h}) < 0, \mathbf{h} \in A\} \neq \emptyset \\ 0 & \text{gdy } \{\mathbf{h}: g(\mathbf{x}, \mathbf{h}) < 0, \mathbf{h} \in A\} = \emptyset \end{cases}$$

$$\{\mathbf{x} : \mu_{g(F)}(\mathbf{x}) = 1\} = \{\mathbf{x} : g(\mathbf{x}, \mathbf{h}) > 0, \mathbf{h} \in A\}$$

$$P_f = \sum_{\mathbf{x}} \mu_{g(F)}(\mathbf{x}) P_{\Omega}(\{\mathbf{x}\}) = \sum_{\mathbf{x}: \mathbf{x} \in \{\mathbf{x}: g(\mathbf{x}, \mathbf{h}) > 0, \mathbf{h} \in A\}} P_{\Omega}(\{\mathbf{x}\})$$

$$P_f = \int_{\{\mathbf{x}: g(\mathbf{x}, \mathbf{h}) > 0, \mathbf{h} \in A\}} dP_{\Omega}(\mathbf{x})$$

Funkcja graniczna zależy od wektora parametrów losowych o wartościach należących do zbioru rozmytego

$$P_f = P_{\Omega \times \Delta}(\{(\omega, \delta) : \delta \in \Theta_X(\gamma), \gamma \in F, g(\mathbf{X}_\Gamma(\gamma)) < 0, g(\mathbf{X}_\Omega(\omega)) < 0\})$$

$$P_f = \sum_{\mathbf{x}: g(\mathbf{x}) < 0} P_\Omega(\{\mathbf{x}\}) \cdot \mu_F(\mathbf{x})$$

$$P_f = \int_{g(\mathbf{x}) < 0} \mu_F(\mathbf{x}) dP_\Omega(\mathbf{x})$$

Przykład

P [kN]	12	15	18	21	24
Liczba pomiarów	15	15	10	5	5
Częstość względna	0.3	0.3	0.2	0.1	0.1
$\mu_F(P)$	0.4	1	0.4	0.4	0.2
$g(P)$ [MPa]	55	25	-5	-35	-65

$$P_f = \sum_{g(P) < 0} P_{\Omega}(\{P\}) \cdot \mu_F(P) = 0.14$$

Interpretacja funkcji przynależności oparta na teorii zbiorów losowych

Niech dana jest zmienna losowa o wartościach przedziałowych

$$\bar{\mathbf{h}}_{\Gamma} : \Gamma \in \gamma \rightarrow \bar{\mathbf{h}}_{\Gamma}(\gamma) \in I(\mathbb{R}^n, F)$$

$$P_f^+ = P_{\Gamma}(\{\gamma : g(\bar{\mathbf{h}}_{\Gamma}(\gamma)) \cap (-\infty, 0] \neq \emptyset\})$$

$$P_f = \sup_{\mathbf{h} : g(\mathbf{h}) < 0} \mu_F(\mathbf{h})$$

Przykład

P [kN]	14.5	17.5	20.5	23.5	26.5
Ekspert 5					
Ekspert 4					
Ekspert 3					
Ekspert 2					
Ekspert 1					
$\mu_F(P)$	0.4	1	0.8	0.6	0.2
$g(P)$	+	+	-	-	-

$$P_f = \sup_{\mathbf{h}: g(\mathbf{h}) < 0} \mu_F(\mathbf{h}) = 0.8$$

Niezawodność konstrukcji o parametrach losowych i rozmytych

$$P_f^+ = P_{\Omega \times \Gamma}(\{(\omega, \gamma) : g(\mathbf{q}, \mathbf{X}_\Omega(\omega), \bar{\mathbf{h}}_\Gamma(\gamma)) \cap (-\infty, 0] \neq \emptyset\})$$

$$P_f^+ = E_\Omega \left(\sup_{g \in (-\infty, 0]} \mu_{g_F(\mathbf{x})}(g) \right)$$

Niezawodność konstrukcji o parametrach losowych i rozmytych

$$\mu_{g(F)}(\mathbf{x}) = \sup_{g \in (-\infty, 0]} \mu_{g_F}(\mathbf{x})(g) = \sup_{g(\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{h}) \leq 0} \mu_F(\mathbf{h})$$

$$P_f = E_{\Omega}(\mu_{g(F)}(\mathbf{x})) = \sum_{\mathbf{x}} \mu_{g(F)}(\mathbf{x}) P_{\Omega}(\{\mathbf{x}\})$$

$$P_f = \int_{R^{n_r}} \mu_{g(F)}(\mathbf{x}) dP_{\Omega}(\mathbf{x})$$

Przykład

P [kN]	14.5	17.5	20.5	23.5	26.5
Ekspert 5					
Ekspert 4					
Ekspert 3					
Ekspert 2					
Ekspert 1					
$\mu_F(P)$	0.4	1	0.8	0.6	0.2

		$g(P, \sigma)$				
P [kN]		14.5	17.5	20.5	23.5	26.5
$\mu_F(P)$		0.4	1	0.8	0.6	0.2
$\mu_{\sigma(F)}(179)$	0.8	34 [MPa]	6 [MPa]	-26 [MPa]	-56 [MPa]	-86 [MPa]
$\mu_{\sigma(F)}(177)$	0.8	32 [MPa]	2 [MPa]	-28 [MPa]	-58 [MPa]	-88 [MPa]
$\mu_{\sigma(F)}(175)$	0.8	30 [MPa]	0 [MPa]	-30 [MPa]	-60 [MPa]	-90 [MPa]
$\mu_{\sigma(F)}(173)$	1	28 [MPa]	-2 [MPa]	-32 [MPa]	-62 [MPa]	-92 [MPa]
$\mu_{\sigma(F)}(171)$	1	26 [MPa]	-4 [MPa]	-34 [MPa]	-64 [MPa]	-94 [MPa]

$$P_f = \sum_{\sigma} P_{\Omega}(\{\sigma\}) \cdot \mu_{\sigma(F)}(\sigma) = 0.3 \cdot 0.8 + 0.3 \cdot 0.8 + 0.2 \cdot 0.8 + 0.1 \cdot 1 + 0.1 \cdot 1 = 0.84$$

Niezawodność konstrukcji o parametrach modelowanych przy wykorzystaniu rozmytych zmiennych losowych

$$F : \Omega \ni \omega \rightarrow F(\omega) \in F(\mathbb{R}^{n_F})$$

$$\bar{\mathbf{h}}_{\Gamma, \omega} : \Gamma \ni \gamma \rightarrow \bar{\mathbf{h}}_{\Gamma, \omega}(\gamma) \in I(\mathbb{R}^{n_F})$$

$$\mu_{F(\omega)}(\mathbf{h}) = P_{\Gamma}(\{\gamma : \mathbf{h} \in \bar{\mathbf{h}}_{\Gamma, \omega}(\gamma)\})$$

$$P_f^+ = P_{\Omega \times \Gamma}(\{(\omega, \gamma) : g(\bar{\mathbf{h}}_{\Gamma, \omega}(\gamma)) \cap (-\infty, 0] \neq \emptyset\})$$

$$P_f^+ = \sum_{\omega_0 : \omega_0 \in \Omega} \sup_{g : g \in (-\infty, 0]} \mu_{g_{F(\omega_0)}}(g) \cdot P_{\Omega}(\{\omega_0\})$$

$$P_f^+ = E_{\Omega} \left(\sup_{g : g \in (-\infty, 0]} \mu_{g_{F(\omega)}}(g) \right)$$

Funkcja graniczna zależy od wektora zmiennych losowych o wartościach należących do zbioru rozmytego

$$P_f = P_{\Omega \times \Delta}(A) = P_{\Omega \times \Delta}(\{(\omega, \delta) : \delta \in \Theta_X(\gamma), \gamma \in F, g(\mathbf{X}_\Gamma(\gamma)) < 0, g(\mathbf{X}_\Omega(\omega)) < 0\})$$

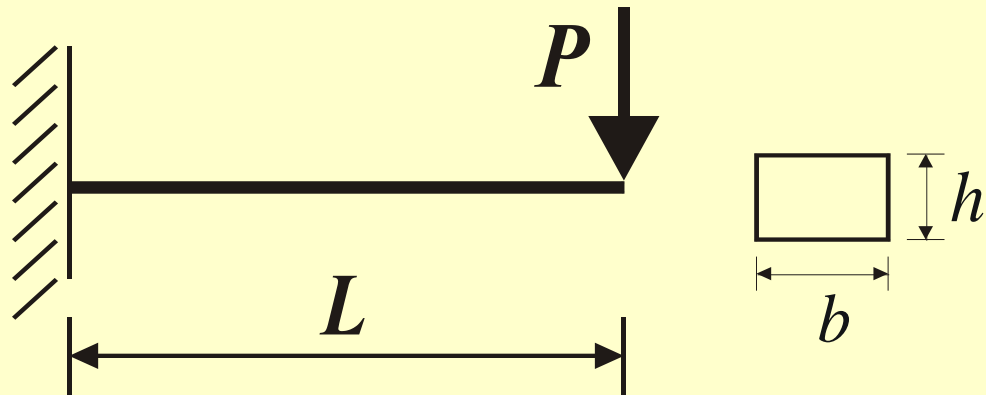
$$P_f = \sum_{\mathbf{x}: g(\mathbf{x}) < 0} P_{\Omega \times \Gamma}(\{(\omega, \gamma) : \mathbf{x} = \mathbf{X}_\Omega(\omega), \mathbf{x} \in \bar{\mathbf{X}}_\Gamma(\gamma)\})$$

$$P_f = P_{\Omega \times \Gamma}(\{(\omega, \gamma) : g(\mathbf{X}_\Omega(\omega)) < 0, \mathbf{X}_\Omega(\omega) \in \bar{\mathbf{X}}_\Gamma(\gamma)\})$$

$$P_f = \sum_{\mathbf{x}: g(\mathbf{x}) < 0} P_\Omega(\{\mathbf{x}\}) \cdot \mu_F(\mathbf{x})$$

$$P_f = \int_{g(\mathbf{x}) < 0} \mu_F(\mathbf{x}) dP_\Omega(\mathbf{x})$$

Przykład



$$g(\mathbf{h}) = \sigma_0 - \frac{|M_{\max}|}{W_z} = \sigma_0 - \frac{6 \cdot P \cdot L}{bh^2}$$

Przykład c.d.

Nr	σ_0 [MPa]	P [kN]
1	[190, 205]	[2, 6]
2	[191, 204]	[2.5, 3]
3	[193, 206]	[3, 4]
4	[192, 205]	[3, 7]
5	[185, 200]	[2, 5]
6	[192, 205]	[3, 5]
7	[190, 202]	[2, 6]
8	[191, 210]	[2, 5]
9	[188, 206]	[1, 7]
10	[190, 207]	[3.5, 6]

$$(\Xi_{\sigma'}, m_{\sigma'}), (\Xi_{P'}, m_{P'}) (\Xi_{\sigma \times P}, m_{\sigma \times P})$$

Przykład c.d.

$$(\bar{\Xi}_{\sigma' \times P'}, m_{\sigma' \times P'}) \subseteq (\bar{\Xi}_{\sigma \times P}, m_{\sigma \times P})$$

α - przekroje

α	\tilde{P}_α [kN]	$\tilde{\sigma}_{0\alpha}$ [Mpa]
1	[3.5, 4]	[193, 200]
0	[1, 7]	[188, 210]

Przykład c.d.

α - przekroje funkcji granicznej

α	g_α [MPa]
1.0	[81.9, 102.8]
0.8	[64.2, 118.7]
0.6	[46.6, 134.6]
0.4	[28.9, 150.4]
0.2	[11.2, 166.3]
0.0	[-6.4, 182.2]

$$P_f^+ = Pl([-\infty, 0]) = \sup_{x \in [-\infty, 0]} \mu_g(x) \approx 0.2$$

$$P_f'^+ \leq P_f^+$$

Równania z rozmytymi parametrami

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{h}}) = \mathbf{0}$$

Wykorzystanie zasady rozszerzania

$$\mu_{\tilde{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}) = \sup_{\mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{h}) = \mathbf{0}} \mu_{\tilde{\mathbf{h}}}(\mathbf{h})$$

Metoda α -przekrojów

$$\tilde{\mathbf{h}}_{i\alpha} = \{h_i : \mu(h_i) \geq \alpha\}$$

$$\mathbf{q}_\alpha = \{\mathbf{q} : \mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{h}) = \mathbf{0}, \mathbf{h} \in \tilde{\mathbf{h}}_\alpha\}$$

$$\mu_{\tilde{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}) = \sup\{\alpha : \mathbf{q} \in \tilde{\mathbf{q}}_\alpha\}$$

Nierówności z rozmytymi parametrami

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{h}}) \geq \mathbf{0}$$

Wykorzystanie zasady rozszerzania

$$\mu_{\tilde{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}) = \sup_{\mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{h}) \geq \mathbf{0}} \mu_{\tilde{\mathbf{h}}}(\mathbf{h})$$

Metody rozwiązywania układów równań przedziałowymi parametrami

Równania liniowe

- metody dokładne
 - metoda kombinatoryczna
 - metoda programowania liniowego
 - metoda Rohn'a
- metody przybliżone
 - przedziałowa metoda eliminacji Gaussa
 - przedziałowa metoda Gaussa-Seidla
 - przedziałowa metoda Krawczyka
 - metoda Hansena
 - metoda Rump'a

Kulpa Z., Pownuk A., Skalna I., Analysis of linear mechanical structures with uncertainties by means of interval methods. Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, vol. 5, 1998, pp.443-477

Metody rozwiązywania układów równań przedziałowymi parametrami

metody nieliniowe

-przedziałowa metoda Newtona

-metoda podziału

-metoda Neumaiera

-metoda Gay'a

-metoda punktowych testów
monotoniczności

-metoda przedziałowych macierzy

Jakobiego

-przedziałowa metoda CSP

Definicje zbiorów rozwiązań układów równań z przedziałowymi parametrami

$$\Sigma_{\exists\exists}(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}) = \{\mathbf{X} : \exists \mathbf{A} \in \bar{\mathbf{A}}, \exists \mathbf{B} \in \bar{\mathbf{B}}, \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}\}$$

$$\Sigma_{\exists\forall}(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}) = \{\mathbf{X} : \exists \mathbf{A} \in \bar{\mathbf{A}}, \forall \mathbf{B} \in \bar{\mathbf{B}}, \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}\}$$

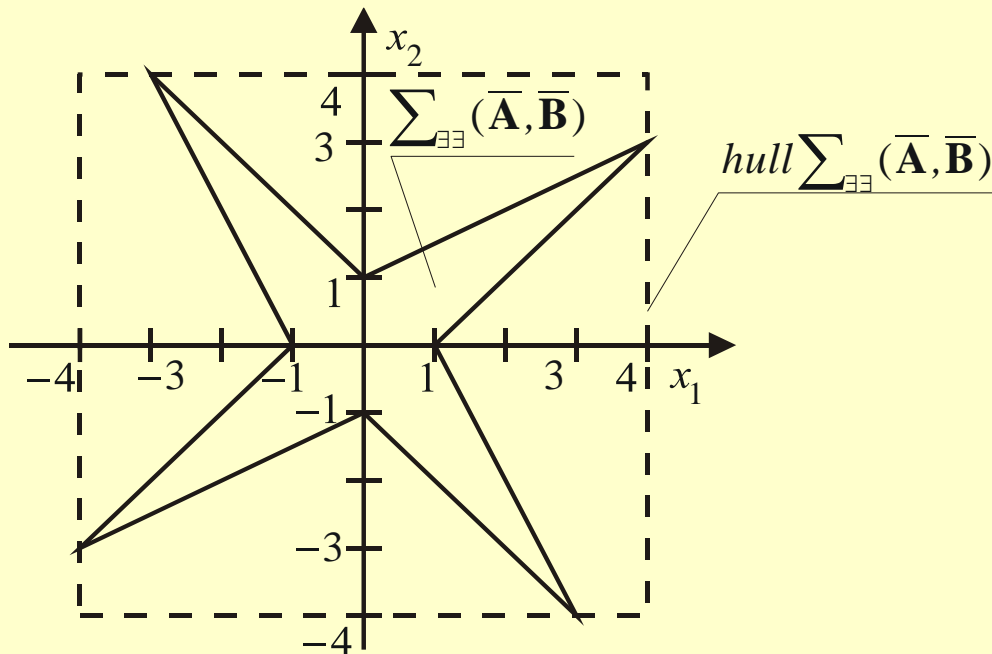
$$\Sigma_{\forall\exists}(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}) = \{\mathbf{X} : \forall \mathbf{A} \in \bar{\mathbf{A}}, \exists \mathbf{B} \in \bar{\mathbf{B}}, \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}\}$$

$$\sum_{\exists\exists}(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}) = \{\mathbf{X} : \bar{\mathbf{A}}\mathbf{X} \cap \bar{\mathbf{B}} \neq \emptyset\}$$

$$\sum_{\exists\forall}(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}) = \{\mathbf{X} : \bar{\mathbf{A}}\mathbf{X} \supset \bar{\mathbf{B}}\}$$

$$\sum_{\forall\exists}(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}) = \{\mathbf{X} : \bar{\mathbf{A}}\mathbf{X} \subset \bar{\mathbf{B}}\}$$

$$\begin{bmatrix} [1,2] & [2,4] \\ [2,4] & [1,2] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [-1,1] \\ [1,2] \end{bmatrix}$$



Podstawy arytmetyki przedziałowej

$$\bar{x} = [x^-, x^+] = \{x \in R : x^- \leq x \leq x^+\}$$

Działania na przedziałach

$$\bar{x} \circ \bar{y} = \{x \circ y : x \in \bar{x}, y \in \bar{y}\}$$

np.

$$\bar{x} + \bar{y} = [x^- + y^-, x^+ + y^+]$$

Przedziałowe rozszerzenie funkcji

Niech $f(x) = x^2 - x$

$$\hat{f}(x) = \bar{x} \cdot \bar{x} - \bar{x}$$
$$f(\bar{x}) = \{f(x) : x \in \bar{x}\}$$

$$\hat{f}([-1, 2]) = [-1, 2] \cdot [-1, 2] - [-1, 2] = [-4, 5]$$

$$f([-1, 2]) = \{f(x) : x \in [-1, 2]\} = [-\frac{1}{4}, 2]$$

Fundamentalna własność arytmetyki przedziałowej

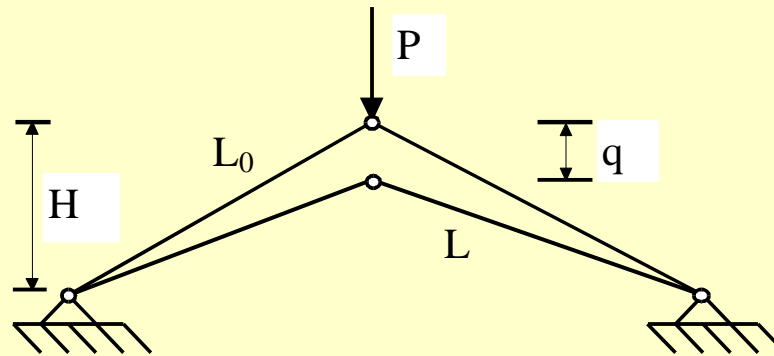
$$f(\overline{\mathbf{X}}) \subseteq \hat{f}(\overline{\mathbf{X}})$$

$$f([-1, 2]) \subseteq \hat{f}([-1, 2])$$

Przedziałowa metoda Newtona

- 1) Niech $x^* \in \bar{x}_0$
- 2) $x_n = \text{mid}(\bar{x}_n)$
- 3)
$$N(x_n, \bar{x}_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{\hat{f}'(\bar{x}_n)}$$
- 4) $\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n \cap N(x_n, \bar{x}_n)$
- 5) Jeśli kryteria zbieżności są spełnione, to stop. W przeciwnym przypadku skok do punktu 2.

Przedziałowa metoda Newtona



Eps [m]		q_1 [m]	q_2 [m]	q_3 [m]
0.01	q^-	0.05046	0.313327	0.834962
	q^+	0.05047	0.313897	0.836264

Przedziałowa metoda Newtona może być wykorzystana do rozwiązywania równań z przedziałowymi parametrami.

Przedziałowa metoda podziału

Jeśli $\mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$

oraz $\mathbf{x}^* \in \bar{\mathbf{D}}$, to

$0 \in \hat{g}_i(\bar{\mathbf{D}})$ dla $i=1, \dots, n$

Przykład

$$g(x) = (x - 1)(x + 1)$$

$$\bar{D} = [0, 2]$$

$$0 \in \hat{g}([0, 2]) = [-3, 3]$$

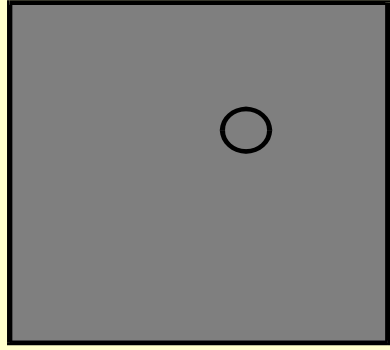
$$x^* \in \bar{D}$$

$$\text{Jeśli } \bar{D}_1 = [2, 4]$$

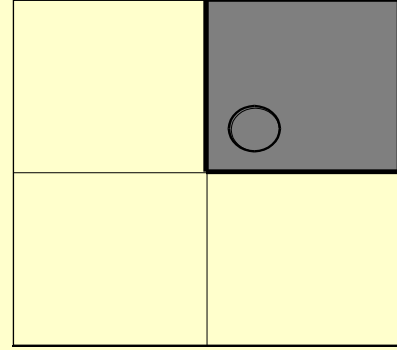
$$0 \notin \hat{g}([2, 4]) = [3, 15]$$

$$x^* \notin \bar{D}_1$$

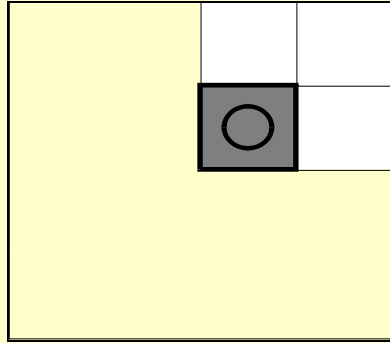
Algorytm przedziałowej metody podziału



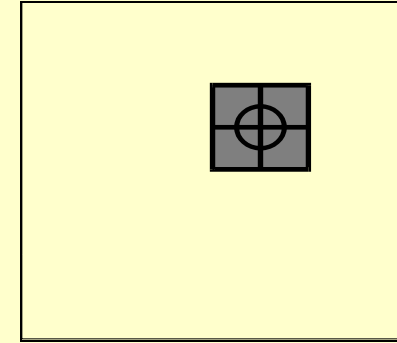
Faza 1



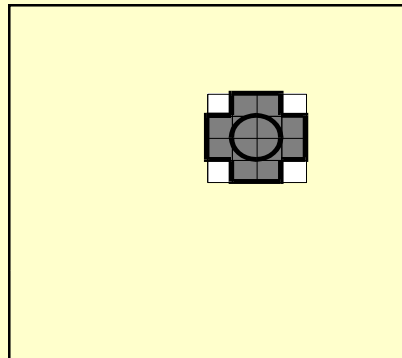
Faza 2



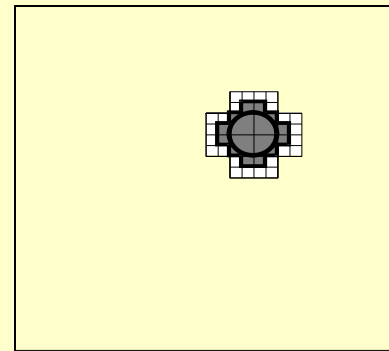
Faza 3



Faza 4

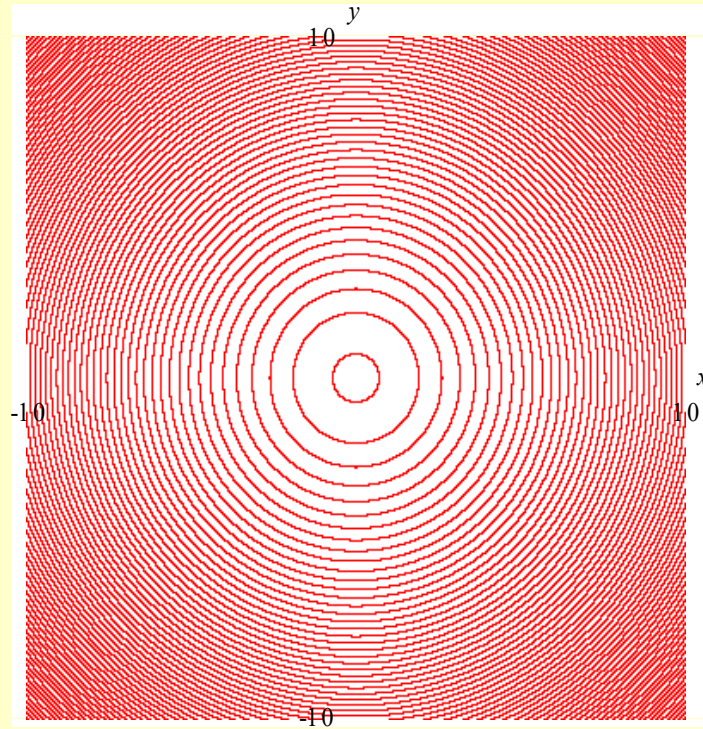


Faza 5



Faza 6

$$\sin\left(x^2 + y^2 - \frac{1}{2}\right) = 0$$



Przedziałowy algorytm rozwiązywania nieliniowych równań algebraicznych ze zbiorowymi współczynnikami

$$f_1(x_1, \dots, x_n, h_1, \dots, h_m) = 0$$

$$f_2(x_1, \dots, x_n, h_1, \dots, h_m) = 0$$

...

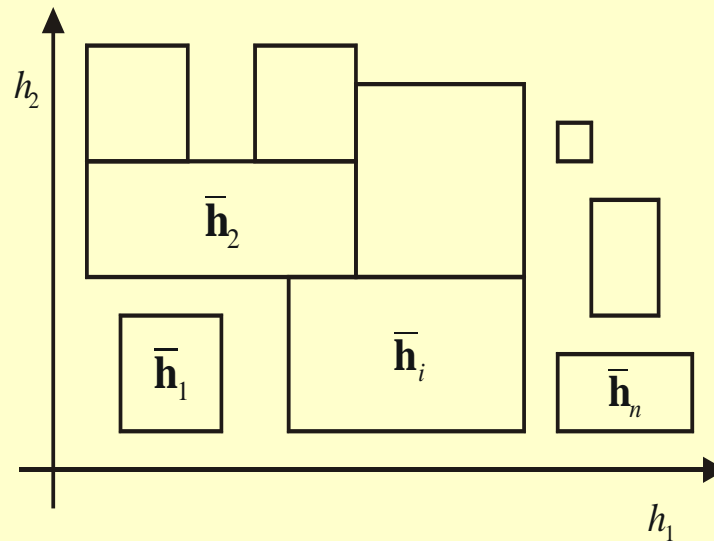
$$f_n(x_1, \dots, x_n, h_1, \dots, h_m) = 0$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{h} \in \bar{\mathbf{h}}$$

Niech $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \bar{\mathbf{h}}^*) = \mathbf{0}$

Jeśli $\mathbf{x}^* \in \bar{\mathbf{x}}$, $\mathbf{h}^* \in \bar{\mathbf{h}}$, to
 $0 \in \hat{f}_i(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{h}})$ dla $i=1, \dots, n$

Jeśli $\exists i \in \{1, \dots, n\}, 0 \notin \hat{f}_i(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{h}})$, to
 $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{h}) \in \bar{\mathbf{x}} \times \bar{\mathbf{h}}, \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \neq \mathbf{0}$



Przedziałowy test monotoniczności

$$0 \notin \frac{\partial \hat{f}(\bar{x})}{\partial h_i}$$

$$y = f(\dots, h_i, \dots)$$

$$y^\pm = f(\dots, h_i^\pm, \dots)$$

$$y^\pm = y \left(\dots, h_i^{\pm \text{sign} \left(\frac{\partial f(t)}{\partial h_i} \right)}, \dots \right)$$

Przedziałowy test monotoniczności

$$\mathbf{K}(\lambda)\mathbf{T} = \mathbf{Q}(\lambda)$$

$$\hat{\mathbf{K}}(\bar{\lambda})\frac{\partial\mathbf{T}}{\partial\lambda} = \frac{\partial\hat{\mathbf{Q}}(\bar{\lambda})}{\partial\lambda} - \frac{\partial\hat{\mathbf{K}}(\bar{\lambda})}{\partial\lambda}\hat{\mathbf{T}}(\bar{\lambda})$$

gdzie

$$\hat{\mathbf{T}}(\bar{\lambda}) = \mathit{hull}\Sigma(\hat{\mathbf{K}}(\bar{\lambda}), \hat{\mathbf{Q}}(\bar{\lambda}))$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{T}}(\bar{\lambda})}{\partial \lambda} = \left[\frac{\partial \hat{T}_1(\bar{\lambda})}{\partial \lambda}, \dots, \frac{\partial \hat{T}_n(\bar{\lambda})}{\partial \lambda} \right]^T$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{T}}(\bar{\lambda})}{\partial \lambda} = \sum_{\exists \exists} \left(\hat{\mathbf{K}}(\bar{\lambda}), \frac{\partial \hat{\mathbf{Q}}(\bar{\lambda})}{\partial \lambda} - \frac{\partial \hat{\mathbf{K}}(\bar{\lambda})}{\partial \lambda} \hat{\mathbf{T}}(\bar{\lambda}) \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 < r < R_2 : \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \lambda \frac{dT(r)}{dr} \right) + Q = 0 \\ r = R_1 : -\lambda \frac{dT(r)}{dr} = \alpha(T(r) - T_b) \\ r = R_2 : T(r) = T_t \end{array} \right.$$

Jasiński M., Pownuk A., Modelling of heat transfer in biological tissue by interval FEM, Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, vol. 7, No. 4, 2000, pp.551-558

Zastosowanie regularnych przedziałowych macierzy Jacobiego do modelowania układów mechanicznych z przedziałowymi parametrami

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{h}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{h})$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{F}}(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n, \bar{h}_1, \dots, \bar{h}_m)}{\partial (q_1, \dots, q_n)}$$

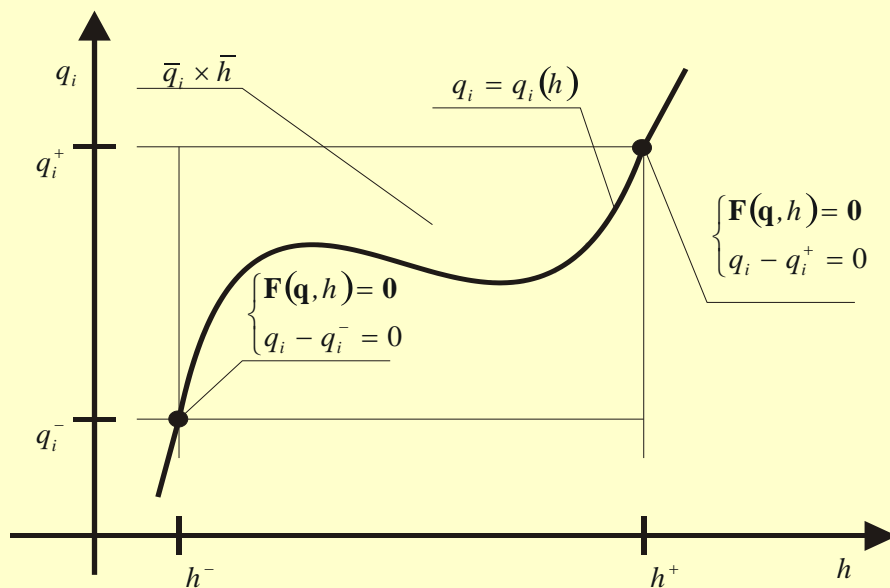
$$\frac{\partial \hat{\mathbf{F}}(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n, \bar{h}_1, \dots, \bar{h}_m)}{\partial (q_1, \dots, q_{i-1}, h_j, q_{i+1}, \dots, q_n)}$$

$$\frac{\partial q_i(\mathbf{h})}{\partial h_j} = - \frac{\left| \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{h})}{\partial (q_1, \dots, q_{i-1}, h_j, q_{i+1}, \dots, q_n)} \right|}{\left| \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{h})}{\partial \mathbf{q}} \right|}$$

$$\mathbf{q}^-(\bar{\mathbf{h}}) = \mathbf{q} \left(\mathbf{h}^{-\text{sign}\left(\frac{\partial \mathbf{q}(t)}{\partial \mathbf{h}}\right)} \right), \quad \mathbf{q}^+(\bar{\mathbf{h}}) = \mathbf{q} \left(\mathbf{h}^{\text{sign}\left(\frac{\partial \mathbf{q}(t)}{\partial \mathbf{h}}\right)} \right)$$

Przypadek jednowymiarowy

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}, h) = \mathbf{0}$$



$$\frac{\partial \hat{\mathbf{F}}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{h})}{\partial \mathbf{q}}$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{F}}(\bar{q}_1, \dots, q_i^-, \dots, \bar{q}_n, \bar{h})}{\partial (q_1, \dots, q_{i-1}, h, q_{i+1}, \dots, q_n)}$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{F}}(\bar{q}_1, \dots, q_i^+, \dots, \bar{q}_n, \bar{h})}{\partial (q_1, \dots, q_{i-1}, h, q_{i+1}, \dots, q_n)}$$

Przypadki szczególne

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}(\mathbf{h})$$

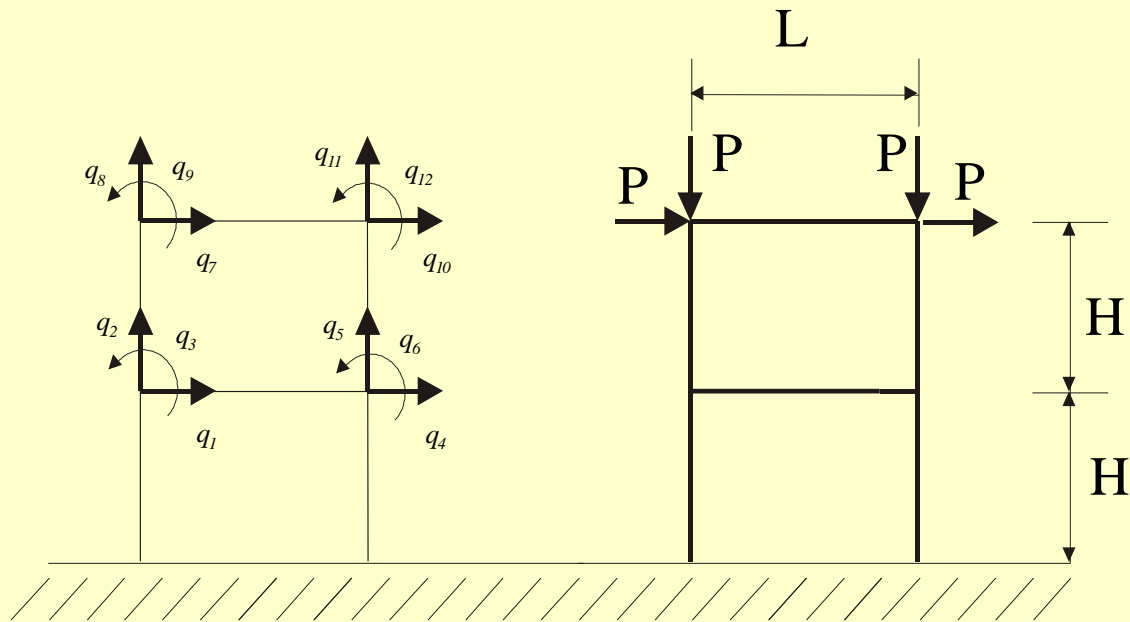
$$\mathbf{K}(\mathbf{h})\mathbf{q} = \mathbf{Q}$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{h})\mathbf{q} = \mathbf{Q}(\mathbf{h})$$

$$\mathbf{K}, \left[\mathbf{K}^i \mid \frac{\partial \hat{\mathbf{Q}}(\bar{\mathbf{h}})}{\partial h_j} \right]$$

$$\hat{\mathbf{K}}(\bar{\mathbf{h}}), \left[\hat{\mathbf{K}}^i(\bar{\mathbf{h}}) \mid \frac{\partial \hat{\mathbf{Q}}(\bar{\mathbf{h}})}{\partial h_j} \right]$$

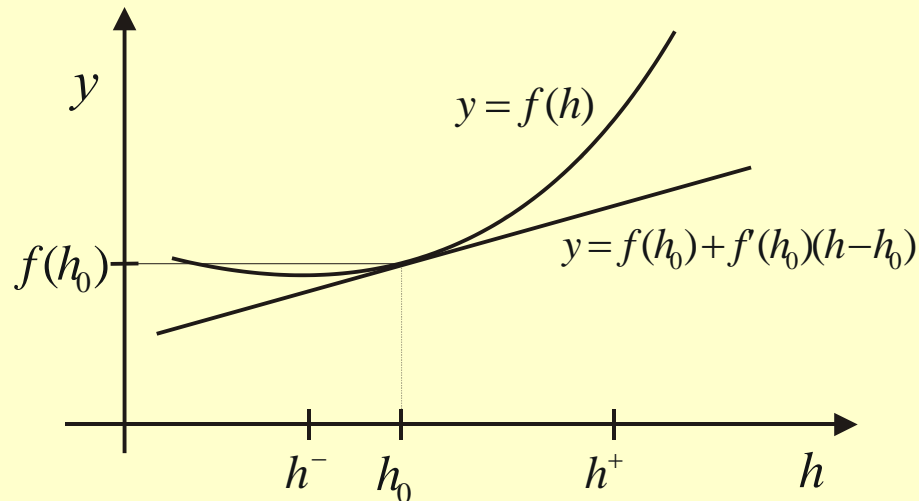
$$\hat{\mathbf{K}}(\bar{\mathbf{h}}), \left[\hat{\mathbf{K}}^i(\bar{\mathbf{h}}) \mid \frac{\partial \hat{\mathbf{K}}(\bar{\mathbf{h}})}{\partial h_j} \hat{\mathbf{q}}(\bar{\mathbf{h}}) - \frac{\partial \hat{\mathbf{Q}}(\bar{\mathbf{h}})}{\partial h_j} \right]$$



przedziałowe parametry: \bar{E} , \bar{J} , \bar{A}

Zastosowanie analizy wrażliwości do modelowania niepewności w układach mechanicznych

$$q_j^- = q_j \left(\mathbf{h}^{-\text{sign}\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{h}}\right)} \right), \quad q_j^+ = q_j \left(\mathbf{h}^{\text{sign}\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{h}}\right)} \right)$$



Przybliżenie liniowe

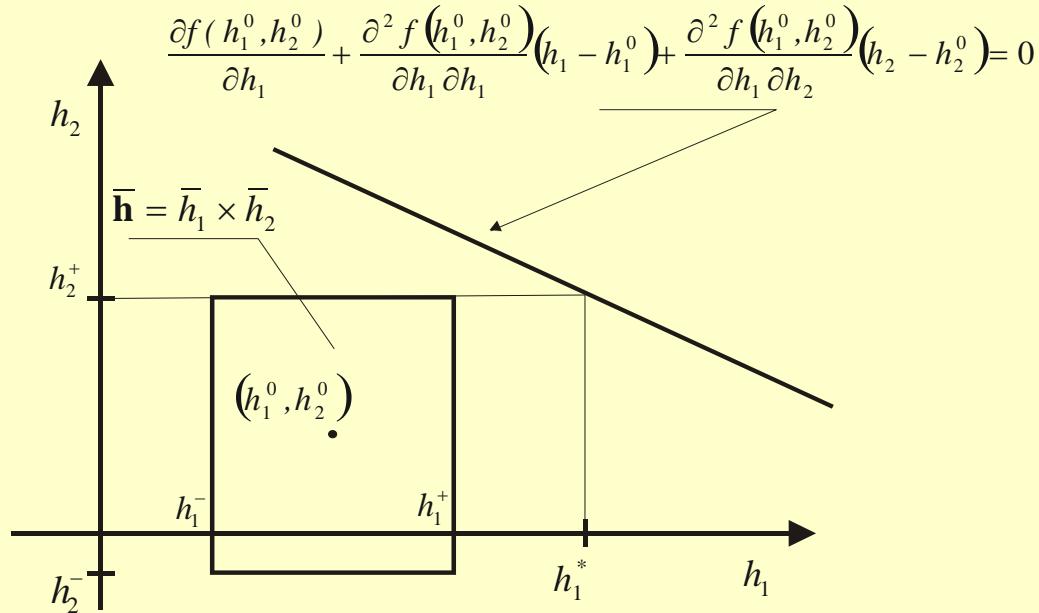
$$\frac{\partial \tilde{f}(h_1, \dots, h_m)}{\partial h_j} \stackrel{df}{=} \frac{\partial \tilde{f}(h_1^0, \dots, h_m^0)}{\partial h_j} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 \tilde{f}(h_1^0, \dots, h_m^0)}{\partial h_j \partial h_k} (h_k - h_k^0)$$

Pierwszy test monotoniczności

$$\text{sign}\left(\frac{\partial \check{f}(\mathbf{h}_1^w)}{\partial h_j}\right) = \text{sign}\left(\frac{\partial \check{f}(\mathbf{h}_2^w)}{\partial h_j}\right) = \dots = \text{sign}\left(\frac{\partial \check{f}(\mathbf{h}_{2^m}^w)}{\partial h_j}\right)$$

$$\left\{ (h_1, \dots, h_m) : \frac{\partial \check{f}(h_1, \dots, h_m)}{\partial h_j} = 0 \right\} \cap \bar{\mathbf{h}} = \emptyset$$

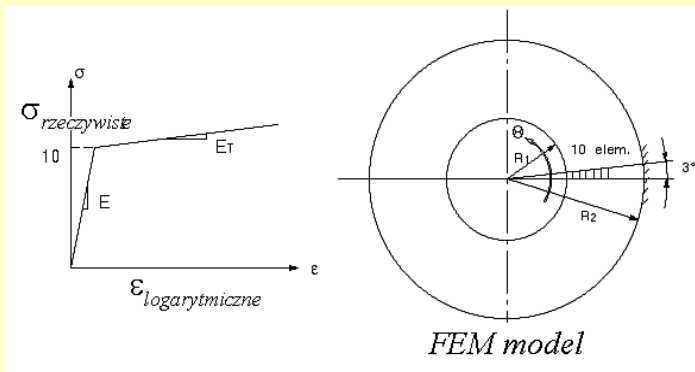
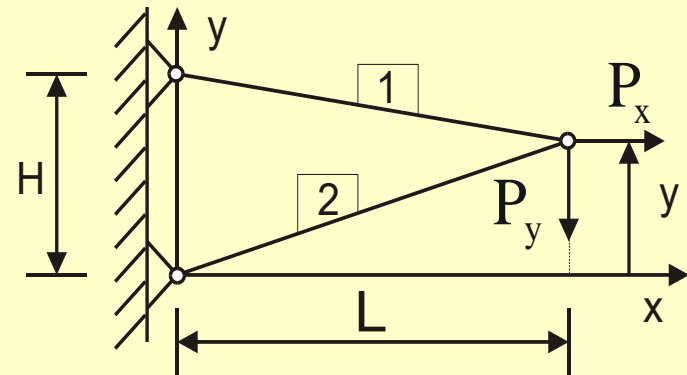
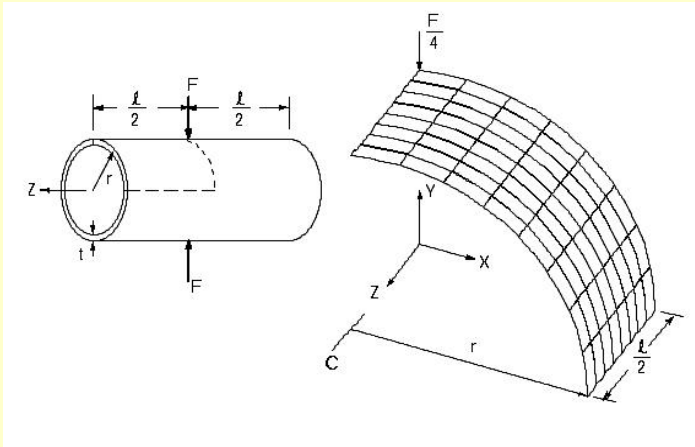
Drugi test monotoniczności



$$h_1^* = h_1^0 - \frac{1}{\frac{\partial^2 f(h_1^0, h_2^0)}{\partial h_1 \partial h_1}} \left(\frac{\partial f(h_1^0, h_2^0)}{\partial h_1} + \frac{\partial^2 f(h_1^0, h_2^0)}{\partial h_1 \partial h_2} (h_2^+ - h_2^0) \right)$$

Funkcja jest monotoniczna gdy $h_i^* \notin \bar{h}_i$

Przykłady obliczeń



Metody całkowania równań różniczkowych z przedziałowymi parametrami

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{h}) \quad \text{gdzie } \mathbf{q}(0, \mathbf{h}) = \mathbf{q}_0(\mathbf{h}), \mathbf{h} \in \bar{\mathbf{h}}$$

$$\mathbf{q}^-(t) = \min_{\mathbf{h} \in \bar{\mathbf{h}}} \mathbf{q}(t, \mathbf{h}), \quad \mathbf{q}^+(t) = \max_{\mathbf{h} \in \bar{\mathbf{h}}} \mathbf{q}(t, \mathbf{h})$$

$$\mathbf{q}^-(t) = \mathbf{q} \left(t, \mathbf{h}^{-\text{sign} \left(\frac{\partial \mathbf{q}(t)}{\partial \mathbf{h}} \right)} \right), \quad \mathbf{q}^+(t) = \mathbf{q} \left(t, \mathbf{h}^{\text{sign} \left(\frac{\partial \mathbf{q}(t)}{\partial \mathbf{h}} \right)} \right)$$

$$\mathbf{0} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{h}} \mathbf{f}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{h})$$

$$\mathbf{0} = \Phi(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{h}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}})$$

$$\text{gdzie } \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{h}}, \dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{h}}$$

Warunki brzegowe dla funkcji \mathbf{v} otrzymujemy różniczkując warunki brzegowe dla funkcji \mathbf{q} .

Całkowanie liniowych równań różniczkowych

$$\mathbf{q}(t, \mathbf{h}) = \int_0^t \mathbf{h}(t - \tau, \mathbf{h}) \cdot \mathbf{F}(\tau, \mathbf{h}) d\tau$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}(t, \mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} = \int_0^t \frac{\partial [\mathbf{h}(t - \tau, \mathbf{h}) \cdot \mathbf{F}(\tau, \mathbf{h})]}{\partial \mathbf{h}} d\tau$$

$$\ddot{x} + 2 \cdot \xi(\mathbf{h}) \cdot \omega(\mathbf{h}) \cdot \dot{x} + \omega(\mathbf{h})^2 x = F(t, \mathbf{h})$$

$$x(t, \mathbf{h}) = \int_0^t \frac{1}{\omega_d} e^{-\xi \omega t} \sin[\omega(t - \tau)] F(\tau) d\tau$$

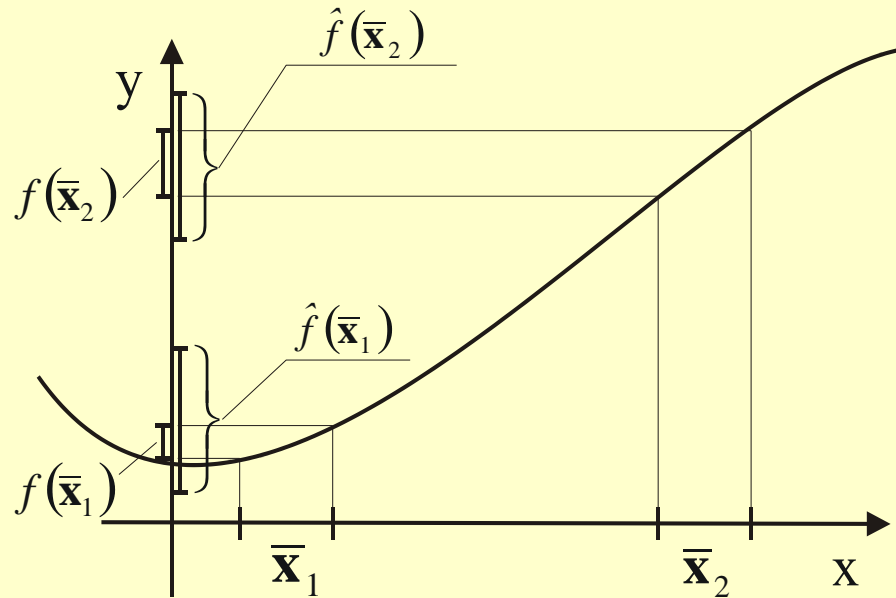
Przedziałowe metody całkowania równań dynamiki konstrukcji

$$\bar{x}(t) = \sum_{i=1}^{p-1} (t - t_0)^i (x_0)_i + (t - t_0)^p (\bar{x}_0)_p$$

Przy obliczaniu współczynników wzoru Taylora
 $(x_0)_i$ można wykorzystać
automatyczne różniczkowanie
oraz postać równania różniczkowego

Zastosowanie metod optymalizacji do modelowania układów z niepewnymi parametrami

$$q_i^- \Leftarrow \begin{cases} \min q_i(\mathbf{h}) \\ \mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{h}) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{h} \in \bar{\mathbf{h}} \end{cases}, \quad q_i^+ \Leftarrow \begin{cases} \max q_i(\mathbf{h}) \\ \mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{h}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{h} \in \bar{\mathbf{h}} \end{cases}$$

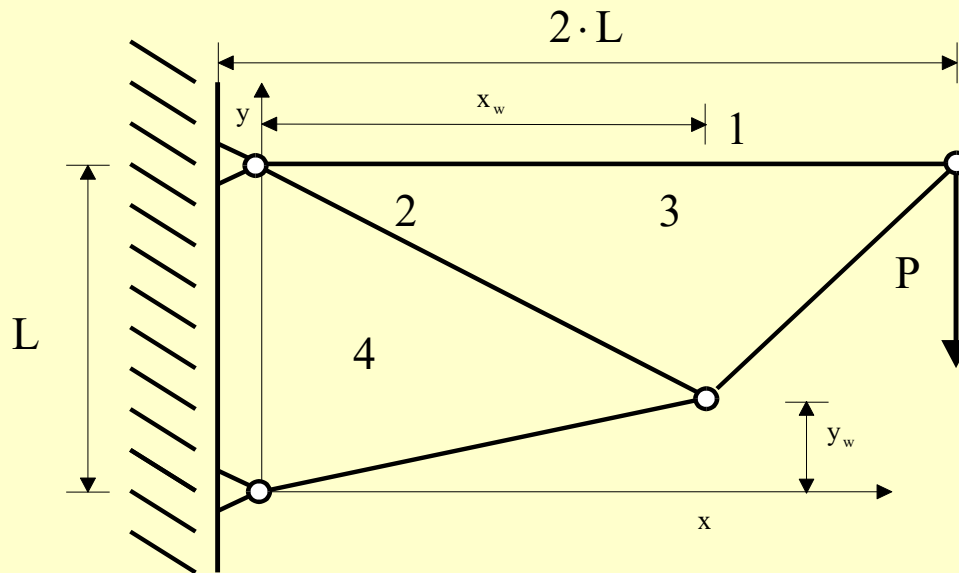


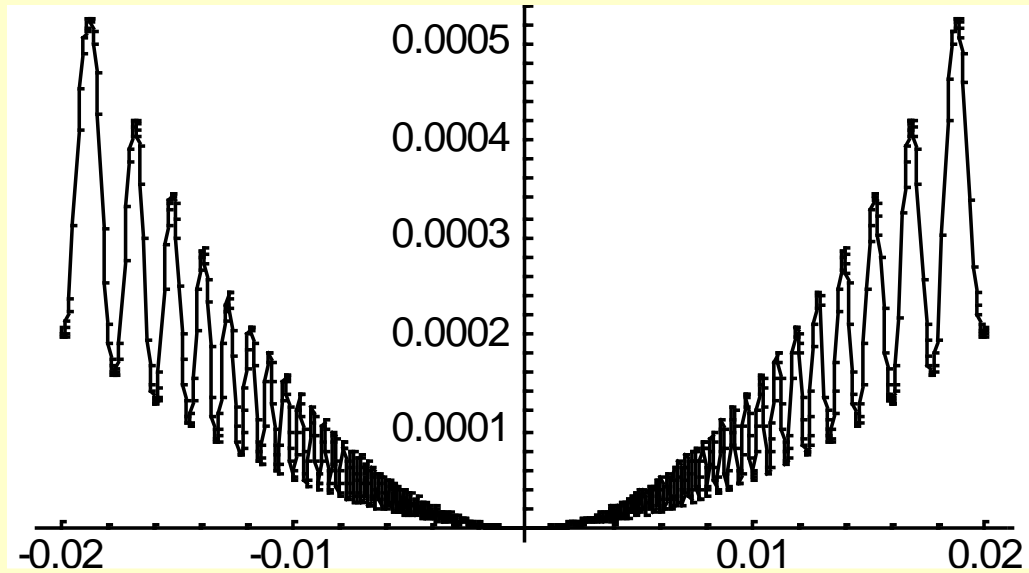
$$\hat{f}(\bar{x}_1)^+ < \hat{f}(\bar{x}_2)^-$$

Procedury przyspieszające zbieżność algorytmu

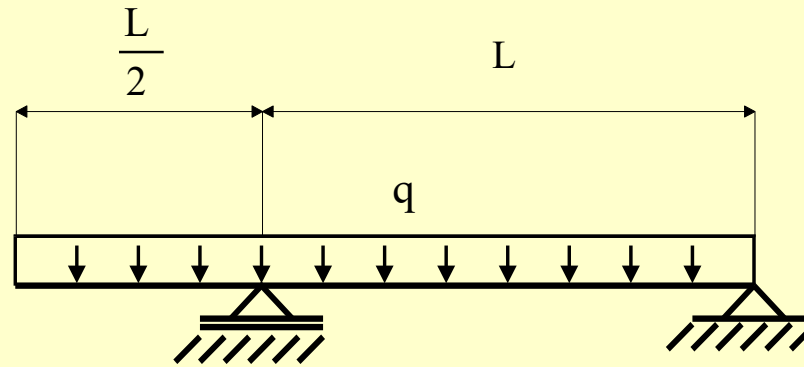
- testy monotoniczności
- przedziałowa metoda Newtona
- test punktu środkowego
- test wypukłości itp.

Pownuk A., Optimization of mechanical structures using interval analysis, Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, vol. 7, No. 4, 2000, s.699-705

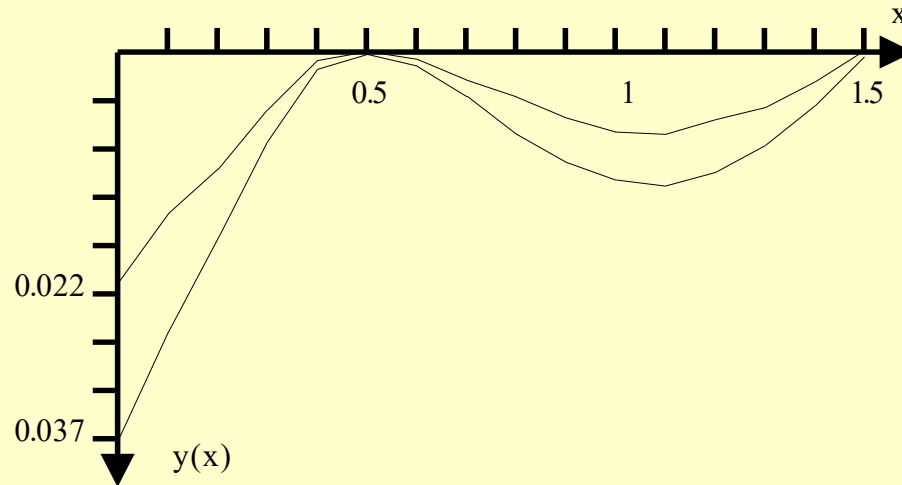




$$f(x) = x^2 \cdot \left(1 - 0.5 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$



Przedziałowe parametry
 $\bar{E}, \bar{J}, \bar{L}, \bar{q}$



Własności algorytmu

- 1) Wszystkie globalne minima należą do przedziałów zawartych w liście L w każdej iteracji algorytmu.
- 2) Jeśli po przeprowadzeniu obliczeń otrzymamy listę przedziałów o szerokości mniejszej od pewnego $\varepsilon > 0$, to wszystkie globalne minima należą do tych przedziałów.
- 3) Algorytm umożliwia uwzględnienie błędów zaokrągleń.
- 4) Metoda jest szczególnie efektywna dla kwadratowych funkcji celu.
- 5) Metoda jest efektywna dla problemów z wieloma minimami globalnymi. Jeśli minima globalne są położone blisko siebie, to pogarsza się zbieżność algorytmu.

Wnioski

- Współczesna analiza przedziałowa została zapoczątkowana przez R. Moore'a w 1966 roku. Po krótkim okresie dużego zainteresowania teoria ta była bardzo silnie krytykowana. Algorytmy z tego okresu nazywane są obecnie „naiwną arytmetyką przedziałową”. Dopiero w początkach lata 80-tych pojawiły się pierwsze algorytmy, które umożliwiły efektywne wykorzystanie metod przedziałowych w technice.
- Wykorzystując arytmetykę przedziałową można skonstruować algorytmy, które są zbieżne globalnie oraz pozwalają na znalezienie rozwiązania z gwarantowaną dokładnością (tzn. z uwzględnieniem wszystkich błędów, którymi obarczone są rozwiązania numeryczne, w tym błędów zaokrągleń).

- Przedziałowe metody całkowania równań dynamiki konstrukcji pozwalają na znalezienie krzywych całkowych z gwarantowaną dokładnością. Powstało wiele programów komputerowych, które wykorzystują te metody.
- Stosowanie prostych algorytmów przedziałowych prowadzi zwykle do dużych różnic pomiędzy rozwiązaniem dokładnym, a rozwiązaniem otrzymanym przy wykorzystaniu metod przedziałowych. Trudności te można częściowo pokonać konstruując specjalne algorytmy. W niniejszej pracy zaprezentowano kilka z nich.

- Bezpośrednie stosowanie przedziałowych układów równań liniowych do modelowania niepewności w układach mechanicznych prowadzi czasem do bardzo zgrubnego oszacowania rozwiązania, ponieważ metoda ta nie uwzględnia zależności parametrów układu mechanicznego. Jednakże otrzymane w ten sposób rozwiązanie przedziałowe zawsze zawiera dokładne rozwiązanie problemu.
- Znalezienie dokładnego rozwiązania przedziałowego układu równań liniowych jest problemem NP-zupełnym, co znacznie ogranicza techniczne zastosowania tej metody modelowania.
- W wielu algorytmach np. w przedziałowej metodzie Newtona lub w przedziałowych testach monotoniczności wykorzystuje się metody rozwiązywania przedziałowych układów równań liniowych jako procedurę pomocniczą. W takich przypadkach można posługiwać się metodami iteracyjnymi lub przedziałową metodą Gaussa.

- Metoda kontynuacji jest metodą numeryczną, która daje wyniki przybliżone w postaci zbioru punktów. Powłoka (wypukła) rozpięta na tych punktach aproksymuje dokładny zbiór rozwiązań. Metodę kontynuacji zaimplementowano w wielu programach komputerowych. Algorytm ten można zastosować efektywnie tylko dla przypadków o małej liczbie parametrów niepewnych.
- Przy pomocy metody podziału możemy otrzymać rozwiązanie równań nieliniowych, które są zbudowane z funkcji nieróżniczkowalnych, a nawet nieciągłych. Metoda ta ma bardzo dużą złożoność obliczeniową.

- Dla funkcji różniczkowalnych można zastosować przedziałową metodę Newtona. Metoda ta jest zbieżna globalnie. Przedziałowa metoda Newtona została wykorzystana do rozwiązania wielu problemów inżynierskich.
- W bardzo wielu typowych problemach inżynierskich zależność rozwiązań od parametrów niepewnych jest monotoniczna. W celu sprawdzenia monotoniczności można zastosować punktowe testy monotoniczności. Jeśli monotoniczność funkcji zostanie wykazana, to ekstremalne wartości funkcji mogą zostać obliczone przy pomocy końców przedziałów.
- Metody oparte na wzorze Taylora można wykorzystać w przypadkach o bardzo dużych wymiarach oraz w problemach nieliniowych. Metoda ta nie może być stosowana, gdy rozwiązanie jest nieciągłą lub nieróżniczkowalną funkcją parametrów.

- Arytmetyka rozmyta jest uogólnieniem arytmetyki przedziałowej. Podejście takie pozwala na dokładniejszy opis niepewności parametrów.
- Korzystając z koncepcji α -przekrojów wszystkie zaprezentowane tutaj metody rozwiązywania równań o parametrach przedziałowych można rozszerzyć na przypadek równań o parametrach rozmytych.
- Parametry zbiorowe (np. parametry przedziałowe) można traktować jak parametry rozmyte, dla których funkcja przynależności jest równa funkcji charakterystycznej zbioru.

- Zadeh zakładał, że pojęcie zbioru rozmytego jest intuicyjnie zrozumiałe. Podejście takie wywołało dyskusję na temat związku teorii zbiorów rozmytych z rachunkiem prawdopodobieństwa. Pomimo dużej liczby przykładów praktycznych zastosowań występują trudności w jednoznacznej interpretacji technicznej pojęć intuicyjnej teorii zbiorów rozmytych.
- Istnieje wiele różnych interpretacji funkcji przynależności zbioru rozmytego. Ponieważ w teorii zbiorów rozmytych można posługiwać się różnymi metodologiami, dlatego w zastosowaniach należy dokładnie ustalić, co właściwie oznacza funkcja przynależności zbioru rozmytego. W pracy szczególną uwagę zwrócono na probabilistyczną interpretację funkcji przynależności zbioru rozmytego oraz na interpretację opartą na teorii zbiorów losowych.

- Wykorzystując probabilistyczną interpretację funkcji przynależności zbioru rozmytego funkcję przynależności można określić przy wykorzystaniu warunkowego prawdopodobieństwa zdarzeń losowych.
- Teoria zbiorów losowych umożliwia skonstruowanie funkcji przynależności zbioru rozmytego w oparciu o zbiór pomiarów przedziałowych. Podejście takie można uogólnić na przypadek, w którym pomiary są zbiorami.
- Wykorzystując probabilistyczną interpretację zbioru rozmytego teorię zbiorów rozmytych można zastosować do obliczania niezawodności układów mechanicznych. Podobne rezultaty można uzyskać wykorzystując interpretację opartą na teorii zbiorów losowych.

<http://zeus.polsl.gliwice.pl/~pownuk/>