ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1999
Seria: BUDOWNICTWO z.

Andrzej POWNUK

# ZASTOSOWANIE REGULARNYCH PRZEDZIAŁOWYCH MACIERZY JACOBIEGO DO OBLICZANIA EKSTERMALNYCH WARTOŚCI WIELKOŚCI MECHANICZNYCH. CZĘŚĆ I - PODSTAWY TEORETYCZNE

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono dwie nowe metody obliczania ekstremalnych wartości funkcji uwikłanych $z_i(t)$. Jeśli pewne specjalne przedziałowe macierze Jacobiego będą regularne to znak pochodnych cząstkowych $\frac{\partial z_i(t)}{\partial t_j}$ będzie stały dla wszystkich $t \in \mathbf{T}$ i ekstremalne wartości $\underline{z}_{\mathbf{i}} = inf\{z_i(t) : t \in \mathbf{T}\}$, $\overline{z}_{\mathbf{i}} = sup\{z_i(t) : t \in \mathbf{T}\}$ można obliczyć na podstawie wierzchołków przedziału $\mathbf{T} \in IR^n$.

# APPLICATION OF REGULAR INTERVAL JACOBIAN MATRIX TO CALCULATION OF EXTREME VALUES OF MECHNICAL QUANTITIES. PART I - THEORETICAL BACK-GROUNDS

**Summary**. In this paper, two new methods for calculation of extreme values of implicit functions $z_i(t)$ are presented. If some special interval matrices are regular then sign of partial derivatives $\frac{\partial z_i(t)}{\partial t_j}$ is constant for all $t \in \mathbf{T}$ and extreme values $\underline{z}_{\mathbf{i}} = inf\{z_i(t) : t \in \mathbf{T}\}$, $\overline{z}_{\mathbf{i}} = sup\{z_i(t) : t \in \mathbf{T}\}$. We can calculate using vertices of interval $\mathbf{T} \in IR^n$.

## 1 Wprowadzenie

Problem modelowania tolerancji w układach mechanicznych można sprowadzić do zagadnienia znalezienia obrazu obszaru tolerancji $\mathbf{T} \subset R^m$ poprzez uwikłane odwzorowania $z(t)$ określone jako rozwiązanie układu nieliniowych równań algebraicznych $F(z,t) = 0$ (gdzie $F : R^n \times R^m \to R^n$). Zbiór wszystkich możliwych rozwiązań określony jest następująco:

$$M = \{(z,t) : F(z,t) = 0, t \in \mathbf{T}\} = \{(z(t),t) : t \in \mathbf{T}\} \tag{1}$$

W pracy opisane są teoretyczne podstawy nowej metody obliczania parametrów $\underline{z}_i, \overline{z}_i$ :

$$\underline{z}_{\mathbf{i}} = inf\{z_i(t) : t \in \mathbf{T}\},\ \overline{z}_{\mathbf{i}} = sup\{z_i(t) : t \in \mathbf{T}\} \tag{2}$$

Metoda oparta jest na własnościach macierzy Jacobiego i matematyce przedziałowej.

## 2 Przedziałowe metody obliczania ekstremalnych wartości funkcji uwikłanych w oparciu o sprawdzenie monotoniczności

Podstawowym wynikiem tej pracy jest następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 1**

Niech dana jest ciągła funkcja $F : R^n \times R^m \ni (z,t) \to F(z,t) \in R^n$ oraz m-wymiarowy przedział $\mathbf{T} = \times_{i=1}^{m} [\underline{t}_i, \overline{t}_i] \subset R^m$. Na podstawie wierzchołków przedziału $\mathbf{T}$ określamy n-wymiarowy przedział $\mathbf{Z} = \times_{i=1}^{n} [\underline{z}_i, \overline{z}_i] \subset R^n$, gdzie

$$\underline{z}_i = min\{z_i(t^w) : t^w \in V\} \tag{3}$$

$$\overline{z}_i = max\{z_i(t^w) : t^w \in V\} \tag{4}$$

$V$ jest zbiorem wierzchołków przedziału $\mathbf{T}$ (odpowiednie wierzchołki można wybrać na podstawie znaku pochodnych $\frac{\partial z_i(t^*)}{\partial t_j}$ obliczonych dla dowolnego $t^* \in \mathbf{T}$).

Jeśli

1) $w(\mathbf{Z}_i) \neq 0$ dla i=1,...,n
2) Funkcja $F$ jest różniczkowalna w sposób ciągły w każdym punkcie pewnego otwartego zbioru $U \subset R^n \times R^m$.
3) Dla każdego $t_0 \in \mathbf{T}$ równanie $F(z,t)=0$ posiada jednoznaczne rozwiązanie $z(t_0)$. (w układach mechanicznych własność ta jest zwykle zagwarantowana).
4) przedziałowe rozszerzenie następujących macierzy Jacobiego

$$\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Z}_1,...,\mathbf{Z}_n,\mathbf{T}_1,...,\mathbf{T}_m)}{\partial(z_1,...,z_n)},\ \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Z}_1,...,\mathbf{Z}_n,\mathbf{T}_1,...,\mathbf{T}_m)}{\partial(z_1,...,z_{i-1},t_j,z_{i+1},...,z_n)} \text{ dla i=1,...,n j=1,...,m} \tag{5}$$

są regularne, to

$$\underline{z}_i = inf\{z_i(t) : t \in \mathbf{T}\},\ \overline{z}_i = sup\{z_i(t) : t \in \mathbf{T}\} \text{ dla i=1,...,n} \tag{6}$$

Dowód

Z różniczkowalności funkcji $F$ wynika, że jakobian $J(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial(z,t)} \in R^n \times R^n \times R^m$ (n-wierszy, n+m kolumn) jest funkcją ciągłą $J : R^n \times R^m \supset \mathbf{X} \ni x \to J(x) \in R^n \times R^n \times R^m$. Zatem dowolny podwyznacznik $M(x) = det\left(\frac{\partial F(x)}{\partial(x_{\alpha_1},...,x_{\alpha_n})}\right)$ ($M : R^n \times R^m \supset \mathbf{X} \ni x \to M(x) \in R$) macierzy

Jacobiego jest również funkcją ciągłą w **X**. Z własności przedziałowego rozszerzenia funkcji oraz regularności macierzy (5) wynika, że:

$$\forall\, x^* \in \mathbf{X}, det\left(\frac{\partial F(x^*)}{\partial z}\right) \neq 0, det\left(\frac{\partial F(x^*)}{\partial\left(x_{\alpha_1},\ldots,x_{\alpha_n}\right)}\right) \neq 0 \tag{7}$$

Na podstawie własności Darboux funkcji ciągłych wszystkie wyznaczniki

$$det\left(\frac{\partial F(x)}{\partial\left(x_{\alpha_1},\ldots,x_{\alpha_n}\right)}\right) \tag{8}$$

mają taki sam znak dla wszystkich $x^* \in \mathbf{X}$. Z założeń (1-3) oraz twierdzenia Gavesa [3] wynika, że pochodne funkcji uwikłanych można obliczyć na podstawie wzoru:

$$\frac{\partial z_i(x)}{\partial t_j} = -\frac{\left|\frac{\partial F(x)}{\partial\left(z_1,\ldots,z_{i-1},t_j,z_{i+1},\ldots,z_n\right)}\right|}{\left|\frac{\partial F(x)}{\partial z}\right|} \tag{9}$$

Ponieważ oba wyznaczniki mają stałe znaki zatem pochodne $\frac{\partial z_i(t)}{\partial t_j}$ mają również stałe znaki dla wszystkich $t \in \mathbf{T}$. Zatem wszystkie funkcje

$$z_i(t_j) = z_i\left(t_1^*,\ldots,t_{j-1}^*,t_j,t_{j+1}^*,\ldots,t_m^*\right) \tag{10}$$

są monotoniczne w **T** przy dowolnym wyborze wartości $t_i^* \in \left[\underline{t}_i, \bar{t}_i\right]$. Jeśli funkcje (10) są monotoniczne, to ich ekstremalne wartości można obliczyć na podstawie wierzchołków przedziału **T**. Poszukiwanie odpowiednich wierzchołków można znacznie skrócić jeśli znamy wartości pochodnych $\frac{\partial z_i(t^*)}{\partial t_j}$ w dowolnym punkcie $t^* \in \mathbf{T}$. Pochodne te można obliczyć na podstawie twierdzenia o pochodnej funkcji uwikłanej:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial z_j}\frac{\partial z_j}{\partial t_i} + \frac{\partial F_k}{\partial t_i} = 0 \quad \text{gdzie k=1,...,n i i=1,...,m} \tag{11}$$

Uwaga. Aby funkcja $z_i(t_j) = z_i\left(t_1^*,\ldots,t_{j-1}^*,t_j,t_{j+1}^*,\ldots,t_m^*\right)$ była monotoniczna przy dowolnym wyborze wartości $t_i^* \in \left[t_i^-, t_i^+\right]$ wystarcza aby przedziałowe rozszerzenia następujących dwóch macierzy Jacobiego

$$\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X})}{\partial z}, \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X})}{\partial\left(z_1,\ldots,z_{i-1},t_j,z_{i+1},\ldots,z_{\mathbf{n}}\right)} \tag{12}$$

były regularne. Jest to bezpośredni wniosek z wzoru (9). Własność tę można wykorzystać w przypadku gdy nie wszystkie macierze (12) są regularne.

## 3 Obliczanie ekstremalnych wartości funkcji uwikłanych–przypadek jednowymiarowy

Dalej będziemy rozpatrywali tylko przypadki, w których uwikłana funkcja $z : R \supset \mathbf{T} \to R^n$ jest krzywą w przestrzeni $R^n$. Zakładamy, że funkcja $z$ jest ciągła w $\mathbf{T}$ oraz różnowartościowa. Założenia te są zwykle spełnione dla funkcji pojawiających się w zastosowaniach inżynierskich.

**Twierdzenie 2**

Niech dane jest ciągła funkcja $z : R \supset \mathbf{T} \to R^n$ oraz n-wymiarowy przedział $\mathbf{Z} = \times_{i=1}^{n} \left[\underline{z}_i, \overline{z}_i\right]$ określony następująco

$$\underline{z}_i = min\{z_i(\underline{t}), z_i(\overline{t})\},\ \overline{z}_i = max\{z_i(\underline{t}), z_i(\overline{t})\} \tag{13}$$

Przedział $\mathbf{X}$ określony jest jako $\mathbf{X} = \mathbf{Z} \times \mathbf{T} \subset R^n \times R$.

Jeśli

1) $w(\mathbf{Z}_i) \neq 0$ dla i=1,...,n

2) istnieje taki punkt $t^* \in int(\mathbf{T})$, że $z(t^*) \in int(\mathbf{Z})$

3) $\partial\mathbf{X} \cap M = \{(z(\underline{t}), \underline{t}), (z(\overline{t}), \overline{t})\}$, gdzie zbiór $M$ określony jest następująco

$$M = \{(z(t), t) : t \in \mathbf{T}\} \tag{14}$$

to

$$\underline{z}_i = inf\{z_i(t) : t \in \mathbf{T}\},\ \overline{z}_i = sup\{z_i(t) : t \in \mathbf{T}\} \text{ dla i=1,...,n} \tag{15}$$

Dowód

Z założenia (1) i (3) wynika, że zbiory $M$ i $\partial\mathbf{X}$ posiadają tylko dwa punkty wspólne. Niech istnieje taki $\tilde{t} \in \mathbf{T}$, że punkt $(z(\tilde{t}), \tilde{t}) \notin \mathbf{X}$, wtedy istnieje takie „i”, że $z_i(\tilde{t}) < \underline{z}_i$ (lub $z_i(\tilde{t}) > \overline{z}_i$ ). Ponieważ funkcja $z_i(t)$ jest ciągła, zatem przyjmuje wszystkie wartości pośrednie pomiędzy $z_i(t^*)$ oraz $z_i(\tilde{t})$. Czyli istnieje takie $\tilde{\tilde{t}} \in \mathbf{T}$, że $z_i(\tilde{\tilde{t}}) = \underline{z}_i$. Zatem zbiór $\partial\mathbf{X} \cap M$ składałby się z trzech punktów $\{(z(\underline{t}), \underline{t}), (z(\overline{t}), \overline{t}), (z(\tilde{\tilde{t}}), \tilde{\tilde{t}})\}$. Jest to sprzeczne z założeniem (3). Ze sprzeczności tej wynika następujący wniosek

$$\forall t \in int(\mathbf{T})\ \ \underline{z}_i < z_i(t) < \overline{z}_i \text{ dla i=1,...,n} \tag{16}$$

Ponieważ $\underline{z}_i = min\{z_i(\underline{t}), z_i(\overline{t})\}$, $\overline{z}_i = max\{z_i(\underline{t}), z_i(\overline{t})\}$, to

$$\forall t \in int(\mathbf{T})\ \ \underline{z}_i \leq z_i(t) \leq \overline{z}_i \text{ dla i=1,...,n} \tag{17}$$

Czyli funkcje $z_i(t)$ osiągają swoje kresy w przedziale $\mathbf{T}$, co kończy dowód.

**Twierdzenie 3**

Niech dana jest funkcja $F : R^n \supset U \supset \mathbf{X} \ni x \to F(x) \in R^n$ różniczkowalna w sposób ciągły w pewnym otwartym zbiorze U . Jeśli istnieję dwa punkty $x_1, x_2 \in \mathbf{X}$ ($x_1 \neq x_2$), takie że

$$F(x_1) = F(x_2) = 0 \tag{18}$$

to macierz $\dfrac{\partial \boldsymbol{F}(\mathbf{X})}{\partial x}$ nie jest regularna.

Dowód

Na podstawie założeń twierdzenia możemy napisać:

$$0 = F(x_2) - F(x_1) \tag{19}$$

Wprowadzamy funkcję pomocniczą $\varphi(s) = F(x_1 + s(x_2 - x_1))$. Dalej możemy napisać:

$$0 = F(x_2) - F(x_1) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(s)ds \tag{20}$$

$$\int_0^1 \varphi'(s)ds = \int_0^1 F'(x_1 + s(x_2 - x_1))ds \cdot (x_2 - x_1) \tag{21}$$

Z twierdzenia o wartości średniej dla całek otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{\partial F_i(x_1 + s(x_2 - x_1))}{\partial x_j} ds = \frac{\partial F_i\left(x_1 + s_{ij}^*(x_2 - x_1)\right)}{\partial x_j}, \text{ gdzie } s_{ij}^* \in [0,1] \tag{22}$$

Ponieważ gdy $s_{ij}^* \in [0,1]$, to $x_1 + s_{ij}^*(x_2 - x_1) = x_{ij}^* \in \mathbf{X}$ oraz

$$\widetilde{A}_{ij} = \int_0^1 \frac{\partial F_i(x_1 + s(x_2 - x_1))}{\partial x_j} ds = \frac{\partial F_i\left(x_1 + s_{ij}^*(x_2 - x_1)\right)}{\partial x_j} \tag{23}$$

$$\frac{\partial F_i\left(x_1 + s_{ij}^*(x_2 - x_1)\right)}{\partial x_j} = \frac{\partial F_i\left(x_{ij}^*\right)}{\partial x_j} \in \frac{\partial \boldsymbol{F}_i(\mathbf{X})}{\partial x_j} \tag{24}$$

czyli

$$\widetilde{A} \in \frac{\partial \boldsymbol{F}(\mathbf{X})}{\partial x} \tag{25}$$

Z (21) i (24) mamy:

$$0 = F(x_2) - F(x_1) = \widetilde{A} \cdot (x_2 - x_1) \tag{26}$$

Ponieważ $x_2 - x_1 \neq 0$, zatem równość (26) może zachodzić tylko wtedy gdy

$$det(\widetilde{A}) = 0 \tag{27}$$

Ponieważ $\widetilde{A} \in \dfrac{\partial \boldsymbol{F}(\mathbf{X})}{\partial x}$ zatem macierz $\dfrac{\partial \boldsymbol{F}(\mathbf{X})}{\partial x}$ nie może być regularna. Co kończy dowód.

**Twierdzenie 4**

Niech $F : R^n \times R \supset U \ni (z,t) \to F(z,t) \in R^n$ gdzie $t \in \mathbf{T}$ oraz $\mathbf{Z} = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} \left[\underline{z}_i , \overline{z}_i\right]$ gdzie

$$\underline{z}_i = min\{z_i(\underline{t}), z_i(\overline{t})\},\ \overline{z}_i = max\{z_i(\underline{t}), z_i(\overline{t})\} \text{ dla i=1,...,n} \tag{28}$$

Przedział **X** określony jest jako $\mathbf{X} = \mathbf{Z} \times \mathrm{T} \subset R^n \times R$.

Jeżeli

1) $w(\mathbf{Z}_i) \neq 0$ dla i=1,...,n;

2) $F$ jest różniczkowalna w sposób ciągły w pewnym otwartym zbiorze $U \supset \mathbf{X}$;

3) dla każdego $t \in \mathbf{T}$ równanie $F(z,t) = 0$ posiada jednoznaczne rozwiązanie $z(t)$. (w układach mechanicznych własność ta jest zwykle zagwarantowana);

4) wszystkie macierze

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}(\mathbf{X})}{\partial z} \tag{29}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}\left(\mathbf{Z}_1,...,\underline{z}_i,...,\mathbf{Z}_n,\mathbf{T}\right)}{\partial\left(z_1,...,z_{i-1},t,z_{i+1},...,z_n\right)},\ \frac{\partial \boldsymbol{F}\left(\mathbf{Z}_1,...,\overline{z}_i,...,\mathbf{Z}_n,\mathbf{T}\right)}{\partial\left(z_1,...,z_{i-1},t,z_{i+1},...,z_n\right)} \text{ dla i=1,...,n} \tag{30}$$

są regularne;

5) istnieje takie $t^* \in \mathbf{T}$, że $\left(z(t^*), t^*\right) \in int(\mathbf{X})$;

to

$$\underline{z}_i = inf\{z_i(t)\text{:}\ t \in \mathbf{T}\},\ \overline{z}_i = sup\{z_i(t)\text{:}\ t \in \mathbf{T}\} \text{ dla i=1,...,n} \tag{31}$$

Dowód

Na podstawie różniczkowalności funkcji $F$ oraz regularności macierzy $\frac{\partial \boldsymbol{F}(\mathbf{X})}{\partial z}$ i twierdzenia Gavesa wynika, że uwikłana funkcja $z(t)$ jest ciągła oraz różniczkowalna. Z założenia zbiór $\partial\mathbf{X}$, $M = \{(z(t),t) : t \in \mathbf{T}\}$ mają co najmniej dwa punkty wspólne:

$$\left(z(\underline{t}),\underline{t}\right), \left(z(\overline{t}),\overline{t}\right) \tag{32}$$

Z założenia (1) wynika, że każda ściana przedziału **X** zawiera tylko jeden z punktów (32).

Współrzędne punktów (32) są rozwiązaniami następujących układów równań (patrz Rys.1)

$$\begin{cases} F(z,t) = 0 \\ z_i - \underline{z}_i = 0 \end{cases},\quad \begin{cases} F(z,t) = 0 \\ z_i - \overline{z}_i = 0 \end{cases} \text{ dla i=1,...,n} \tag{33}$$

Jeśli równania (33) będą miały więcej niż jedno rozwiązanie, to zbiór $\partial\mathbf{X} \cap M$ będzie składał się z więcej niż dwu punktów (32). Równania (33) można zapisać w postaci:

$$F\left(z_1,\dots,z_{i-1},\underline{z}_i,z_{i+1},\dots,z_n,t\right)=0,\ F\left(z_1,\dots,z_{i-1},\overline{z}_i,z_{i+1},\dots,z_n,t\right)=0 \tag{34}$$

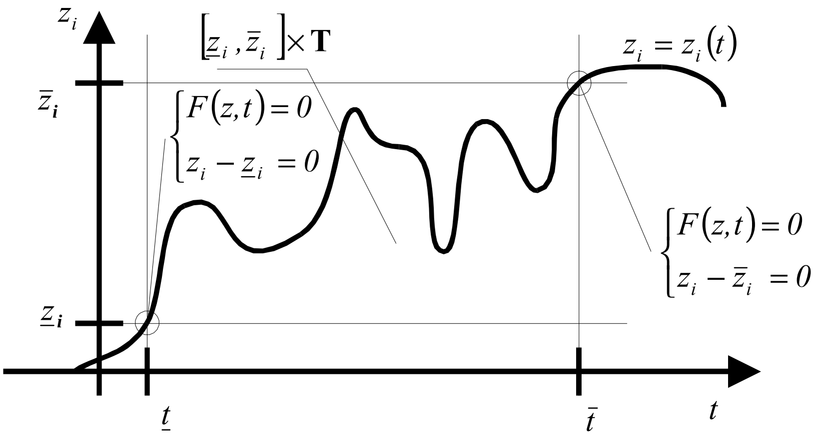
Na podstawie twierdzenia 3 jeśli macierze Jacobiego układów równań (34)

$$\frac{\partial \mathbf{F}\left(\mathbf{Z}_1,\dots,\underline{z}_i,\dots,\mathbf{Z}_n,\mathbf{T}\right)}{\partial\left(z_1,\dots,z_{i-1},t,z_{i+1},\dots,z_n\right)},\ \frac{\partial \mathbf{F}\left(\mathbf{Z}_1,\dots,\overline{z}_i,\dots,\mathbf{Z}_n,\mathbf{T}\right)}{\partial\left(z_1,\dots,z_{i-1},t,z_{i+1},\dots,z_n\right)} \text{ dla i=1,...,n} \tag{35}$$

będą regularne, to układy te posiadają jednoznaczne rozwiązanie. Czyli zbiór $\partial\mathbf{X}\cap M$ składa się z dwu punktów $\left(z(\underline{t}),\underline{t}\right),\left(z(\overline{t}),\overline{t}\right)$. Ponieważ na podstawie założenia (5) istnieje punkt $\left(z\left(t^*\right),t^*\right)\in int(\mathbf{X})$, to uwikłana funkcja $z=z(t)$ spełnione są wszystkie założenia tw. 4 czyli:

$$\underline{z}_i = inf\left\{z_i(t): t\in\mathbf{T}\right\},\ \overline{z}_i = sup\left\{z_i(t): t\in\mathbf{T}\right\} \text{ dla i=1,...,n} \tag{36}$$

co kończy dowód.




Rys.1 Funkcja $z_i(t)$ spełnia warunek $\underline{z}_i < z_i(t) < \overline{z}_i$ dla każdego $t\in\left(\underline{t},\overline{t}\right)$.
Fig.1 Function $z_i(t)$ satisfy condition $\underline{z}_i < z_i(t) < \overline{z}_i$ for all $t\in\left(\underline{t},\overline{t}\right)$.

## 4 Wnioski

W pracy przedstawiono teoretyczne podstawy dwu nowych metod modelowania tolerancji w układach mechanicznych. Opracowane algorytmy można zastosować do układów mechanicznych, których matematyczny model dany jest przy pomocy układu nieliniowych równań algebraicznych postaci *F(z,t)=0***,** gdzie $F: R^n\times R^m \ni (z,t)\rightarrow F(z,t)\in R^n$ i $t\in\mathbf{T}\subset R^{\boldsymbol{m}}$. Inne przedziałowe metody rozwiązywania układów równań zależnych od parametrów z pewnego zbioru $\mathbf{T}\subset R^{\boldsymbol{m}}$ można znaleźć w pracach [1,2,4-8]. Klasyczną metodą poszukiwania zbioru rozwiązań $M=\left\{(z,t): F(z,t)=0, t\in\mathbf{T}\right\}$ jest metoda kontynuacji [9]. Do znalezienia rozwiązań układów nieliniowych równań algebraicznych można również wykorzystać wyniki teorii multifunkcji [10]. Zastosowania przedstawionych tutaj algorytmów w mechanice opisane są w drugiej części tej pracy.

LITERATURA

[1] Gay D.M., Computing Preturbation Bounds for Nonlinear Algebraic Equations, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol.20, No.3, 1983, s.638-651

[2] Kearfott R.B., Xing Z., An Interval Method Step Control for Continuation Methods, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol.31, No.3, 1994, s.892-914

[3] Maurin K., Analiza. Część I. Elementy, PWN, Warszawa, 1991

[4] Neumaier A., Interval methods for system of equations, Cambridge, University Press, Cambridge, 1990

[5] Neumaier A., Rigorous Sensitivity Analysis for Parameter-Dependent Systems of equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 144, 1989, pp.16-25

[6] Neumaier A., The enclosure of solutions for parameter-depedent system of equations, in Reliability in Computing, Academic Press, New York, 1988, pp.269-286

[7] Neumaier A., Generalized Lyapunov-Schmidt reduction for parametrized equations at near singular points, http://solon.cma.univie.ac.at/~neum, 1991

[8] Pownuk A., Modelowanie niepewnych parametrów układów mechanicznych metodami matematyki przedziałowej. XXXVIII Sympozjon „Modelowanie w mechanice", Wisła, 1999

[9] Rheinboldt W.C., Numerical analysis of parametrized nonlinear equations. John Wiley and Sons, New York, 1986

[10] Saint-Pierre P., Newton and Other Continuation Methods for Multivalued Inclusions. Set-Valued Analysis, Vol.3, 1995, s.143-156

**Abstract**

In this paper, theoretical back-grounds of modelling interval uncertainties using interval arithmetic are presented. It is shown that if some special interval matrices are regular, then implicit functions $z_i(t)$ are monotone in interval **T**. Using these facts, we can calculate extreme values of the functions $z_i(t)$ where $t \in \mathbf{T}$ and $F(z(t),t)=0$ (i.e. we can calculate numbers $\underline{z}_i = sup\{z_i(t) : t \in \mathbf{T}\}$, $\bar{z}_i = sup\{z_i(t) : t \in \mathbf{T}\}$ i=1,...,n). We can apply the presented method in sensitivity analysis of structures. Engineering applications of these algorithms are presented in the next part of this paper.